快速傅立叶变换求解 Poisson 方程

考虑如下带 Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程：

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \\ u = \alpha \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ ， f 是定义在 Ω 上某一函数，而 α 是定义在 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的某一函数.

先来导出求解以上 Poisson 方程的五点差分格式. 将区域 Ω 在 x方向和 y方向分别进行 $I+1$ 和 $J+1$ 等分，则 x方向和 y方向的网格步长分别为

$$h = a/(I+1), \;\; k = b/(J+1),$$

而目标点为 $x_i = ih,\ y_j = jk$ ， $0 \le i \le I+1, 0 \le j \le J+1.$

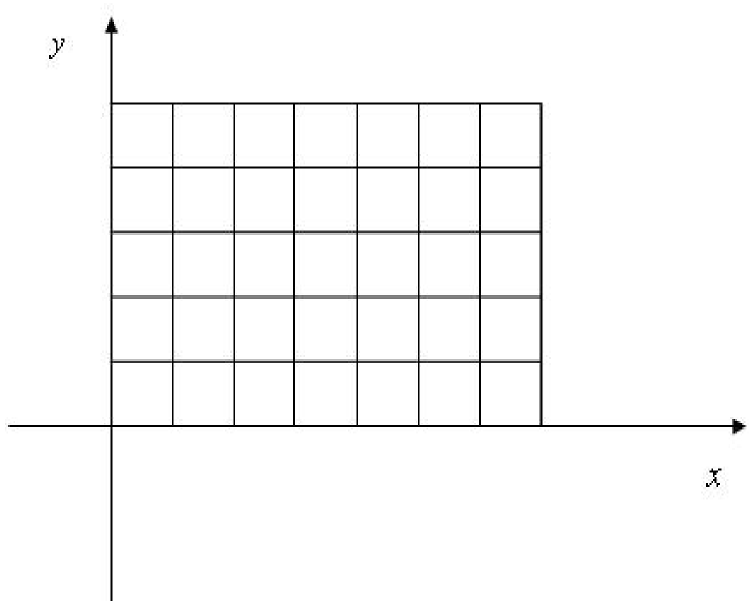

图 1. 矩形区域网格剖分.

求解 Poisson 方程 (1) 的五点差分格式如下：

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{ij} = f_{ij}, \;\; (x_i, y_j) \in \Omega_h, \\ u_{ij} = \alpha_{ij}, \;\; (x_i, y_j) \in \partial\Omega_h. \end{cases} \tag{2}$$

式中
$$\Delta_h u_{ij}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{k^2}.$$

不失一般性，设 Poisson 方程 (1) 满足齐次 Diriechlet 边界条件，即 $\alpha\equiv 0$；且设 $a=b=1$. 则求解它的五点差分格式可写成如下矩阵方程：
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}, \tag{3}$$
式中，
$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix}2&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&-1&2&-1\\&&&-1&2\end{bmatrix}_{I\times I},\quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}2&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&-1&2&-1\\&&&-1&2\end{bmatrix}_{J\times J},$$
$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1,J}\\u_{21}&u_{22}&\cdots&u_{2,J}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\u_{I1}&u_{I2}&\cdots&u_{IJ}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}f_{11}&f_{12}&\cdots&f_{1J}\\f_{21}&f_{22}&\cdots&f_{2J}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\f_{I1}&f_{I2}&\cdots&f_{IJ}\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P}=[\sin(ij\pi h)]\in\mathbb{R}^{I\times I}$ 和 $\boldsymbol{Q}=[\sin(ij\pi k)]\in\mathbb{R}^{J\times J}$. 求解五点差分格式的快速求解算法如下：

求解 Poisson 方程五点差分格式的快速 DST 方法.

步 1. 给出划分数 $I+1, J+1$, 得步长 $h=\dfrac{1}{I+1}, k=\dfrac{1}{J+1}$.

形成向量 $\boldsymbol{\lambda}$, 其第 i 位置的元素 λ_i 为 $\frac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{i\pi h}{2}, 1\le i\le I$,

形成向量 $\boldsymbol{\mu}$, 其第 j 位置的元素 λ_j 为 $\frac{4}{k^2}\sin^2\dfrac{j\pi k}{2}, 1\le j\le J$,

计算矩阵 $\boldsymbol{F}$, 其第 (i,j) 位置的元素为 $f(ih,jk), 1\le i\le I, 1\le j\le J$.

步 2. 使用快速 DST 计算矩阵 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}$; 在 MATLAB 中可写成

```
V=dst(dst(F)')'.
```

步 3. 计算矩阵 $\boldsymbol{W} = [w_{ij}]$,

$$w_{ij} = \frac{4hkv_{ij}}{\lambda_i + \mu_j}.$$

步 4. 使用快速 DST 计算矩阵 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{PWQ}$; 在 MATLAB 中可写成:

```
U=dst(dst(W)')'.
```

试自己给出算例, 使用上面的方法实现 Poisson 方程五点差分格式的快速 DST 方法, 列表给出在不同剖分下的求解时间. 尽量和其它算法比较, 验证该方法的高效性.