

Project 2: 差分格式稳定性及数值效应比较实验

取 $a = 1, 2, 4$, $h = 0.1$, $\tau = 0.08$, 用以下几种差分格式求解对流方程

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0, \\ u(0, x) = f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 0 & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

得 $t = 4$ 时数值结果. 用图示说明算法的稳定性和间断点附近的计算效果, 并进行相应的数值分析.

迎风格式(Upwind):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n),$$

Lax-Friedrichs格式:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

Lax-Wendroff格式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}a^2\lambda^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

修正迎风格式:

$$u_j^{n+1} = du_{j-p-1}^n + (1-d)u_{j-p}^n,$$

式中 $p = [a\lambda]$, $d = a\lambda - [a\lambda]$, $\lambda = \tau/h$ 为网格比, 记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.