

PDE数值解练习

1、讨论扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} = \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^n$$

的稳定性。这里 $\delta_x^2 u_j := u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ 。

2、讨论求解抛物型方程

$$u_t = au_{xx}$$

的三层隐式格式

$$(1 + \theta) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \theta \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

的稳定性。

3、数值求解抛物型方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, 0 < t < 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \end{cases}$$

如果空间步长 h 取定为0.1，那么时间步长 τ 取何值时效果最佳？给出理论分析。