PDE数值解练习2

1、用五点差分格式求解Poisson方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 4, \quad (x,y) \in \Omega, \\ u = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

式中$\Omega = \{(x,y);\ |x| < 1, |y| < 1\}$。

(1)列出用正方形网格剖分解域（$h = k$）时相应的差分方程。

(2)求解$h = 1$和$h = 1/2$时相应的差分方程，获得显式解。

2、使用五点差分格式求解如下椭圆型方程边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u - q(x,y)u = f, \quad (x,y) \in \Omega, \\ u = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

式中$\Omega = (0,1) \times (0,1)$，而函数$q(x,y) \geq 0$。

(1)证明：此时仍成立离散极值原理。换言之，如对于任意内格点$(x_i, y_j) \in \Omega_h$, $L_h u_{ij} \geq 0$，式中

$$L_h u_{ij} = (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j})/h^2 + (u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1})/k^2 - q(x_i, y_j)u_{ij},$$

则成立

$$\max_{\bar{\Omega}_h} u_{ij} = \max_{\partial\Omega_h} u_{ij}.$$

(2)利用结果(1)，求证差分方程之解是存在唯一的。

3、设系数矩阵A对称正定，证明求解线性方程组$Ax = b$的Gauss-Seidal迭代法是收敛的。