齐次图上的随机感染权重接触过程

Contact processes with random connection weights on regular graphs

薛晓峰

北京大学数学科学学院

masonxuexf@math.pku.edu.cn

主要内容

1 模型概述

图G 上的随机感染权重接触过程是以$\{0,1\}^G$ 为状态空间的自旋系统。其演化机制如下，首先在图上每个结点x 赋独立同分布的正随机变量$\rho(x)$，$\rho(x)$ 称为x 的感染权重。ρ 给定后，过程演化的转移速率如下

$$c(x,\eta) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \eta(x) = 1, \\ \lambda\rho(x) \sum\limits_{y:y\sim x} \rho(y)\eta(y) & \text{if} \quad \eta(x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

直观上，疾病传播发生在邻居之间的接触瞬间。感染权重越高的点与邻居接触的次数越频繁，一对邻居x, y 之间接触的速率正比于$\rho(x)\rho(y)$, 此模型由J. Peterson 于[2] 在完全图上引入。

Peterson 在[2] 中证明了完全图上此过程能否在短时间内灭绝取决于是否$\lambda < \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$。

定理1.1 (Peterson)**.** 设C_n 是n 个点构成的完全图。当$\lambda > \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$ 时，存在$c > 0$ 使

$$\lim_{n\to+\infty} P^{1,C_n}_{\frac{\lambda}{n},\omega}(\eta_{e^{cn}} = \emptyset) = 0, a.s..$$

当$\lambda < \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$ 时，存在$C > 0$ 使

$$\lim_{n\to+\infty} P^{1,C_n}_{\frac{\lambda}{n},\omega}(\eta_{C\log n} = \emptyset) = 1, a.s..$$

2 主要问题及结论

我们希望在更一般的齐次图如格点、齐次树上推广完全图上的结论。即是否在某种意义下有$\lambda_c \approx \frac{1}{\deg(G)\mathrm{E}\rho^2}$。受目前方法的限制我们最终采用了一种类似流体动力学极限的方法将临界值定义准确表述如下：

定义2.1. 对于一族度递增的齐次图$\{G_n\}_{n\geq 1}, \deg(G_n) = n$。称

$$\lambda_c = \sup\{\lambda : \lim_{t\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \sup_{x\in G_n} P^{1,G_n}_{\frac{\lambda}{n}}(\eta_t(x) = 1) = 0\}$$

是这一族$\{G_n\}_{n\geq 1}$ 上的随机感染权重接触过程的灭绝临界值。

定义直观物理解释，当图的度很高时就不再区分具体度是多少，以$A_t = \lim_{n\to+\infty} P^1_{\frac{\lambda}{n}}(\eta_t(x) = 1)$ 近似当作是高度数图上一点在时刻t 染病的概率。进而将疾病灭绝与否理解为A_t 是否趋于0。

我们希望对大多数$\{G_n\}_{n\geq 1}$ 较好的情形可以证明$\lambda_c = \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$。

我们目前的主要结论是证明了对任意一族简单齐次图$\{G_n\}_{n\geq 1}$，$\lambda_c \geq \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$。

定理2.2 (Xue, XF). 设随机感染权重ρ 有界。给定一族简单齐次图$\{G_n\}_{n\geq 1}, \deg(G_n) = n$。当$\lambda < \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$时

$$\lim_{t\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \sup_{x\in G_n} P^{1,G_n}_{\frac{\lambda}{n}}(\eta_t(x) = 1) = 0.$$

推论2.3. 当$\lambda < \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$时, 对于格点$\{\boldsymbol{Z}^d\}_{d\geq 1}$,

$$\lim_{t\to+\infty} \limsup_{d\to+\infty} P^{1,\boldsymbol{Z}^d}_{\frac{\lambda}{2d}}(\eta_t(O) = 1) = 0.$$

对于齐次树$\{\boldsymbol{T}^d\}_{d\geq 1}$,

$$\lim_{t\to+\infty} \limsup_{d\to+\infty} P^{1,\boldsymbol{T}^d}_{\frac{\lambda}{d}}(\eta_t(O) = 1) = 0.$$

3 证明概要

3.1. 随机感染权重双重接触轨道过程

为证明主要结论我们引入辅助模型：据有随机感染权重的双重接触轨道过程。设图G 每结点上给定随机感染权重$\rho(\cdot)$。则以G 为底图，$\rho(\cdot)$ 为感染权重的双重接触轨道过程ζ_t 的状态空间为$\{0, 1, 2, \ldots\}^G$。

对于G 中任意结点x 以及x 的任一邻居y，x 的状态$\zeta(x)$ 以速率1 跳跃至0，以速率$\lambda\rho(x)\rho(y)$ 跳跃至$\zeta(x)+\zeta(y)$。当$\rho\equiv 1$ 时，此模型即Griffeath 于[3] 中引入的经典双重接触轨道过程(Binary contact path processes)。

直观上，此模型考虑疾病严重程度，患病邻居之间仍可相互传染，被邻居传染一次则将邻居目前的患病严重程度增加在自身目前的严重程度上。当只区分每个位置是否患病时，此过程则退化为接触过程。严格表述为如下耦合性质：

定理3.1. 对任意$x\in G$，令$\eta_t(x)=1_{\{\zeta_t(x)>0\}}$, 则$\eta_t$ 是G 上以$\rho(\cdot)$ 为随机感染权重的接触过程。进而

$$P(\eta_t(x)=1)=P(\zeta_t(x)\geq 1)\leq \mathrm{E}\zeta_t(x).$$

模型概述
主要问题及结论
证明概要
待解决的问题
参考文献
访问主页
标题页
第 6 页 11
返回
全屏显示
关闭
退出

3.2. 定理2.2 证明概要

由定理3.1 易知定理2.2 是下述定理的直接推论

定理3.2. 任意给定一族简单齐次图$\{G_n\}_{n\geq 1}$，$\deg(G_n)=n$。对任意$T>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in G_n}\left|\mathrm{E}_{\frac{\lambda}{n}}^{1,G_n}\rho(x)\zeta_t(x)-\mathrm{E}\rho\exp\{t(\lambda\mathrm{E}\rho^2-1)\}\right|=0.$$

定理3.2 本身也给出了$\mathrm{E}\rho(x)\zeta_t(x)$ 在任意有限时间内的近似过程。此近似过程为一指数过程，当$\lambda>\frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$时趋于无穷，当$\lambda<\frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$ 趋于0。

定理3.2 证明梗概：对给定随机感染权重$\omega=\{\rho(\cdot)\}$, 由ζ_t 的定义易知

$$\frac{d}{dt}\mathrm{E}_{\frac{\lambda}{n},\omega}^{1,G_n}\zeta_t=(A_\omega-I)\mathrm{E}_{\frac{\lambda}{n},\omega}^{1,G_n}\zeta_t.$$

其中

$$A_\omega(x,y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{n}\rho(x)\rho(y) & \text{if}\quad y\sim x\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

直接解线性常微分方程组易知

$$\rho(x)\mathrm{E}^{1,G_n}_{\frac{\lambda}{n},\omega}\zeta_t(x)=e^{-t}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{t^l}{l!}(\frac{\lambda}{n})^l\sum_{l:x\text{ 出发}l\text{ 步轨道}}\prod_{i=0}^{l-1}\rho^2(x_i)\rho(x_l).$$

于是

$$\mathrm{E}^{1,G_n}_{\frac{\lambda}{n}}\rho(x)\zeta_t(x)=e^{-t}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{t^l}{l!}(\frac{\lambda}{n})^l\sum_{l:x\text{ 出发}l\text{ 步路径}}\mathrm{E}\prod_{i=0}^{l-1}\rho^2(x_i)\rho(x_l)$$

将l 步路径区分为路径上的点两两不同或出现过相同的两种情况考虑，简单估算两类路径数目及利用一些随机变量之间的相关性易得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\rho\exp\{t(\lambda\mathrm{E}\rho^2-1)\}&\le\mathrm{E}^{1,G_n}_{\frac{\lambda}{n}}\rho(x)\zeta_t(x)\\&\le\mathrm{E}\rho\exp\{t(\lambda\mathrm{E}\rho^2-1)\}+\frac{O(\exp\{t\lambda\sup\rho^2\})}{n}\end{aligned}$$

由于t 限制在有限区间内，令n 趋于无穷即得所需结论。

4 待解决的问题

自然的问题是对于哪些$\{G_n\}_{n\geq1}$，有$\lambda_c = \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$? 即要证明临界值的上界也是$\frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$。由定理3.2 的结论不依赖具体$\{G_n\}$，最大胆的猜测是任一族$\{G_n\}_{n\geq1}$ 都成立$\lambda_c = \frac{1}{\mathrm{E}\rho^2}$。尚不明确这样猜是否有道理。而且感觉上界的情形想找到不依赖于具体图结构的证明会比较困难。

目前希望针对具体$\{G_n\}_{n\geq1}$ 一类一类解决。[2] 中解决了完全图的情形。齐次树上的接触过程可由分支过程从下控制，利用这个方法我们自认为对于齐次树的上界情形也已经找到了严格证明。格点的情形是目前主要考虑的，我们相信结论是对的，但尚未找到解决办法。

5 参考文献

- 参考文献

1. Xue, XF. (2013). Contact processes with random connection weights on regular graphs. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **392**(20), 4749-4759.

2. Peterson, J. (2011). The contact process on the complete graph with random vertex-dependent infection rates. *Stochastic Processes and their Applications* **121**(3), 609-629.

3. Griffeath, D. (1983). The Binary Contact Path Process. *The Annals of Probability* **11**(3), 692-705.

4. Liggett, T. M. (1985). *Interacting Particle Systems.* Springer, New York.

5. Liggett, T. M. (1999). *Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes.* (Vol. 324). Springer.

谢　谢