Kneser 猜想的一个新的简洁证明 *

Joshua E. Greene

(Harvey Mudd 大学数学系， Claremont ， CA 91711)

以 $[2n+k]$ 记自然数集合 $\{1,2,\cdots,2n+k\}$，并用 $\binom{[2n+k]}{n}$ 表示 $[2n+k]$ 的所有 n 元子集。 M. Kneser [4] 在 1955 年提出考虑 $\binom{[2n+k]}{n}$ 的具有如下性质的划分，它使得分在同一组中的 n 元子集两两相交。 Kneser 注意到存在把 $\binom{[2n+k]}{n}$ 只分成 $k+2$ 组的合乎要求的简单做法；事实上，令 K_i 表示由所含最小元素为 i 的 $[2n+k]$ 的 n 元子集所组成的集合，那么容易看出，$K_1, K_2, \cdots, K_{k+1}$, 和 $K_{k+2} \cup \cdots \cup K_{n+k+1}$ 是对 $\binom{[2n+k]}{n}$ 的合乎要求的分组。进一步，Kneser 猜想任何一种满足所述性质的划分至少得分出 $k+2$ 组。这个猜想长期悬而未决，最后是由 L. Lovász [5] 于 1978 年利用代数拓扑方法第一次证实了 Kneser 猜想的成立。在得知 Lovász 的证明以后，I. Bárány 在短短一周内发现了一个极简洁的证明，他使用的工具是 Lusternik, Schnirelman 和 Borsuk (LSB) 的关于球面覆盖的著名结果和 D. Gale 的关于球面上点集均匀分布的一个定理。本文将改造 Bárány 的论证，对 Kneser 猜想给出一个避免使用 Gale 定理的更朴素的证明。

令 $S^m = \{x \in R^{m+1} : \| x \| = 1\}$ 表示 R^{m+1} 中的单位球面。设 $a \in S^m, F \subseteq S^m$ 。我们定义 a 与 F 的距离为 $\inf_{x\in F} d(a,x)$ ，这儿 d 表示 R^{m+1} 中的欧氏距离。记以 a 为心的开半球面为 $H(a) = \{x \in S^m : a \cdot x > 0\}$ ， $H(a)$ 的边界，一个 $(m-1)$- 球面，为 $S(a) = \{x \in S^m : a \cdot x = 0\}$ 。另外，对 $\lambda > 0$ ，用 $B(a,\lambda) = \{x \in S^m : d(a,x) < \lambda\}$ 来表示以 a 为心的半径为 λ 的开球。

LSB- 定理断言，任一由不多于 $m+1$ 个闭集组成的 S^m 的覆盖中必含有一个覆盖至少一对对径点的闭集。我们需要 LSB- 定理的下述简单推广。

引理 1 若有 $m+1$ 个集合组成 S^m 的覆盖，且其中每个集合或为开集或为闭集，则其中有一个集合含 S^m 的一对对径点。

证明. 先讨论 S^m 的覆盖由 $m+1$ 个开集 $U_1, \cdots, U_{m+1}$ 构成的情况。球面是紧致度量空间，所以可以对这个开覆盖取到 Lebesgue 数 $\lambda > 0$ ，即对任意 $x \in S^m$ 都存在相应的 U_j 覆盖

*译自： The American Mathematical Monthly, 109, Dec. 2002, 918–920 。

$\overline{B(x,\lambda)}$ 。再次利用 S^m 的紧致性，我们知道存在有限点集 $A \subseteq S^m$ ，适合 $\cup_{x\in A} B(x,\lambda) = S^m$ 。对 $j = 1, \cdots, m+1$ ，令 $F_j = \cup_{x\in A, \overline{B(x,\lambda)} \subseteq U_j} \overline{B(x,\lambda)}$ 。于是， F_j 是 U_j 的闭子集，且这 $m+1$ 个 F_j 形成 S^m 的一个覆盖。现在，使用 LSB- 定理可以说明存在一个 F_j 包含一对对径点，从而相应的 U_j 也包含这对对径点。

接下来讨论一般情况，设 S^m 的覆盖由 t 个闭集 $F_1, \cdots, F_t$ 和 $m+1-t$ 个开集 $U_{t+1}, \cdots, U_{m+1}$ 组成。若这些闭集中存在含对径点的元素，则证明结束。否则，存在 $\epsilon > 0$ ，每个闭集的直径均小于 $2-\epsilon$ 。对 $i = 1, \cdots, t$ ，我们定义 $U_i = \{x \in S^m :\ d(x, F_i) < \frac{\epsilon}{2}\}$ 。显然， $U_1, \cdots, U_{m+1}$ 是组成 S^m 的覆盖的 $m+1$ 个开集。由上一段论证，存在一个 U_j 覆盖一对对径点。但由 $U_i, i \leq t$ ，的构造可知 $j > t$ 。这意味着在原先给出的覆盖 $F_1, \cdots, F_t, U_{t+1}, \cdots, U_{m+1}$ 中找到了一个含对径点的集合。至此引理得证。 ■

有了上述准备，我们可以着手 Kneser 猜想的证明。

定理 1 若 $\binom{[2n+k]}{n}$ 被划分为 $k+1$ 类，则其中必有一类包含两个不相交 n- 元集。

证明. 设 $\binom{[2n+k]}{n} = \cup_{i=1}^{k+1} B_i$ 。我们要证明存在一个含有两个不交 n- 元集的 B_i 。

考虑 $S^{k+1} (\subseteq R^{k+2})$ 上分布在一般位置的 $2n+k$ 个点的集合 $X = \{x_1, \cdots, x_{2n+k}\}$ ；即 X 中任意 $k+2$ 个元素都在 R^{k+2} 中线性无关（亦即不被一个过原点的超平面覆盖）。这种分布是存在的，譬如说可以利用 Vandermonde 矩阵的非异性来给出具体构造，令 $y_i = (1, i, i^2 \cdots, i^{k+1}), x_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$ ；事实上，几乎所有的点分布都处于一般位置。对 $\forall\, b = \{b_1, \cdots, b_n\} \in \binom{[2n+k]}{n}$ ，我们令 $f(b) = \{x_{b_1}, \cdots, x_{b_n}\}$ 。现在对 $i = 1, \cdots, k+1$ ，记 $U_{i+1} = \{a \in S^{k+1} :\ \exists\, b \in B_i, f(b) \subseteq H(a)\}$ 。令 $F_1 = S^{k+1} \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{k+1})$ 。易见， F_1 为闭集， $U_2, \cdots, U_{k+2}$ 为开集，且它们一起做成 S^{k+1} 的一个覆盖。依引理 1 ，这 $k+2$ 个集合中有一个包含了一对对径点。这会是 F_1 吗？不会，因为如果有对径点 $\{a, -a\} \subseteq F_1$ ，那么就有 $H(a)$ 与 $H(-a)$ 都只含 X 中至多 $n-1$ 个点，从而 X 中有至少 $k+2$ 个点落入 $S(a)$ ，再注意到 $S(a)$ 落入 R^{k+2} 的一个 $k+1$ 维子空间，我们就发现这同 X 处于一般分布的假设相抵触。这样一来，就得出一定有某个 U_j 包含一对对径点 $\{a, -a\}$ 。也就是说，存在 $b, b' \in B_{j-1}$ ，满足 $f(b) \subseteq H(a)$ ， $f(b') \subseteq H(-a)$ 。于是，我们知道 b 和 b' 是 B_{j-1} 中互不相交的两个 n 元集合。证毕。 ■

在 Bárány 的证明中， Gale 定理被用来说明，如果我们采用定理 1 的证明中所指出的 X 的具体构作方法，那么将得到一个在球面上分布得相当均匀的点集，即该构作保证了 $F_1 = \emptyset$ 。于是，我们的引理证明的第一部分，相当于熟知的 LSB- 定理的开集形式，可以被拿来完成定理证明。相较而言，我们通过建立 LSB- 定理的开闭混合情形的推广，避免了 Gale 定理的使用，而只基于满足弱得多的假设的点集分布的存在性直接给出了 Lovász-Kneser 定理的证明。

致谢: 我感谢 Anders Berg 和 Professor András Gyárfás 提供的有益评论, 也感谢 Professor Francis Su 在本文准备过程中的帮助。

参考文献

[1] I. Bárány, A short proof of Kneser's conjecture, *J. Combin. Theory* Ser. A **25** (1978) 325–326.

[2] K. Borsuk, Drei Sätze *über* die n-dimentionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.* **20** (1933) 177–190.

[3] D. Gale, Neighboring vertices on a convex polyhedron, in: *Linear Inequalities and Related Syetems* , H.W. Kuhn and A.W. Tucker, eds., Princeton University Press, Princeton, 1956.

[4] M. Kneser, Aufgabe 300, *Jahresber Deutch Math. Verein.* **58** (1955) 27.

[5] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *J. Combin. Theory* Ser. A **25** (1978) 319–324.

[6] L. Lusternik and L. Schnirelman, *Topological Methods in Variational Calculus,* Issledowatelskiĭ Institut Matematiki pri O.M.G.U., Moscow, 1930 [Russian]

译注:

a 、闵行图书馆藏有 S. S. Chern 和 F. Hirzebruch 编的两卷本的书 Wolf Prize in Mathematics , 其中搜集了 1999 年 Wolf 数学奖得主之一 Lovász 的若干篇学术文章和科普文章。(Lovász 的很多讲义和科普文章可以从其在微软研究院的主页上下载，强力推荐 !）下面的两篇文章和他解决 Kneser 猜想的文章都是他 30 岁以前完成的重要工作，在 Chern 编的书中可以找到；阅读这些文章不需要很多数学知识，你可以随着 Lovász 的想像力尽情飞翔。

Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* **2**, (1971) 253-267; reprinted *Annals of Discrete Math.* **21** (1984) 29-42.

On the Shannon capacity of graphs, *IEEE Trans. Inform. Theory* **25**, (1979) 1-7.

Lovász 关于 Kneser 猜想的文章引发了拓扑方法在组合学与理论计算机科学中的应用的大量工作。国内出版的堵丁柱教授的科普小册子 “判定树理论导引” 亦脱胎于 Lovász 的讲义。在堵的书中你会看到代数拓扑中的 Lefschetz 不动点定理是如何在算法复杂性研究的某些课题里发挥重要作用，这方面图灵奖得主姚期智教授有很好的工作。上面列出的 Lovász 的 1971 年的文章解决了 C. Berge 的弱完美图猜想。当年， Fulkerson 仅仅是在收到 C. Berge 寄来的明信片从而得知 Lovász

已经获证弱完美图猜想的消息后的几个小时内也独立给出了一种证明。 Fulkerson 在收到明信片前早就推导出弱完美图猜想的一个等价形式，但认为其结论实在是过分地强，也就一直迟迟不敢冒险早一些开始那最后几个小时的紧张脑力劳动。现在，人们已经可以利用矩阵技巧对弱完美图定理给出半面纸篇幅的证明。去年，以 Princeton 的 Seymour 为主的一个三人小组宣称证明了 Berge 的强完美图猜想，其证明规模巨大。一旦其论文正式发表，他们将有权利向 Carnegie Mellon University 的 Gerard Cornuejols (Fulkerson 奖得主) 索要 1 万美圆的悬赏金。 Seymour 等人的工作于 2002 年 7 月 5 日被著名期刊 Science 加以报道。 Semidefinite Programming 是当下组合优化的一个重要研究方向，它以上面列出的 Lovász 关于香农容量的文章为源头之一。

Paul Erdős, László Lovász 和 Vera T. Sos 等人创立了一个名为 Budapest semesters in mathematics (BSM) 的项目，将一批批的美国和加拿大的优秀数学系大学生送到匈牙利接受短期的匈牙利数学教育，一种世界上最成功的纯数学教育（ Donald Knuth 语 ）。本文作者曾受益于 BSM 项目，他所感谢的 András Gyárfás 是一位著名数学家，也是作者在 BSM 项目中遇到的一位匈牙利教师。闵行图书馆藏有 BSM 使用的一本教科书 Miklós Laczkovich, Conjecture and Proof , 是闵行图书馆最适合数学系低年级学生阅读的镇馆之宝。

b 、 Bárány 和 Lovász 一样，也是在 1948 年出生的一位匈牙利天才数学家。不同的是， Bárány 同时拥有音乐会巡回演出的专业，他在 1978 年参加完一场音乐会演出后的旅行途中不幸车祸身亡。在我们的组合学课本， C. Berge 的 “超图－－有限集的组合学中”，你们可以领略到 Bárány 的若干数学作品的绮丽。两位荷兰数学家 A.E. Brouwer 和 A. Schrijver 对 Bárány 的完全超图分解定理的一种情形的证明被作为最后一章收录在 J.H. van Lint 和 R.M. Wilson 精彩的组合学课本 A Course in Combinatorics 之中，此书也收藏在闵行图书馆。

c 、捷克数学家 J. Matousek 最近在系列丛书 Universitext 中出了一本书， Using the Borsuk-Ulam Theorem －－ Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry , 但交大图书馆尚未见到收藏。在 Matousek 的主页上，你可以下载该书的若干章节，其中就包括了讲述 Kneser 猜想相关部分的内容。你将在那儿欣赏到 Lovász-Kneser 定理的各种证明，各种有趣的推广和变形，包括上面提到的著名数学家 Schrijver 给出的一种推广。阅读此书，你不需要预先学过代数拓扑，其实对本文中使用的 LSB －定理完全可以给出 ” 标准 ” 的组合证明。看看 Universitext 中的数学书，你会知道你所在阅读的很多所谓的数学书讨论得更多的是垃圾，而非数学。闵行图书馆藏有 Schrijver 的近著， Combinatorial Optimization–Polyhedra and Efficiency, 传授的的是组合优化的正派武功，不妨看一看是否与你想象中的组合优化有所不同。

d 、本文中的 LSB- 定理通常被称为 Lusternik-Schnirelmann 定理，一般的书上将其作为 Borsuk-Ulam 定理，即 Matousek 的书的名字中提到的那个定理，的推论。一本容易找到的中文本科生教

材是： M.A. Armstrong, 基础拓扑学，北京大学出版社，可参见其 237 页了解相关的简单拓扑结果。上个世纪初崛起的波兰数学学派的两个中心是 Warsaw 和 Lvov（ Lvov 现在成了乌克兰的领地）， Karol Borsuk 和 Stan Ulam 就分别在这两个中心出生和走上数学道路，他们的合作开始于 Borsuk 到 Lvov 的一次访问。 Borsuk 在 1933 年的一篇著名文章“ Three theorems on the n-dimensional euclidean sphere ”中的一个定理解决了 Ulam 的一个猜想，正是该定理后来被冠名为 Borsuk-Ulam 定理。 Borsuk 的上述文章也以其中提出的 Borsuk 猜想而闻名。拓扑学中的 Borsuk-Ulam 定理已成为组合数学的重要工具，而反过来， Kahn 和 Kalai 则利用“纯组合”论证否定了作为拓扑问题提出的 Borsuk 猜想（这一否定解答又引发大量后续工作）。闵行图书馆阅览室藏有同 Paul Erdős ，一个历史上曾提出最多数学猜想和拥有最多数学合作者的数学家，很有关系的一本书，即 Aigner 和 Ziegler 写的 Proofs from the Book, Second Edition, Springer 。我很早以前看过一本好象是从德文翻译过来的书，叫《数学欣赏》，这个书名其实也适合用来反映 Aigner 和 Ziegler 的书的内容，但这样就丢掉了 the Book 一词的典故。该书把对 Borsuk 猜想的若干讨论也作为优美证明的典范而收入。 Ulam 提出了 Monte Carlo 方法且在美国氢弹研制过程中扮演重要角色，他最后于 1984 年在 Santa Fe 去世前担任的是科罗拉多大学生物数学教授。 Santa Fe 现在以当今复杂性研究的重镇，紧邻美国 Los Alamos 国家实验室的 Santa Fe 研究所而闻名。主要由 Ulam 的遗孀整理的关于 Ulam 生前言行的一本自传体的书， Adventures of a Mathematician ，很早以前读过其中译本，但似乎交大图书馆没有馆藏。

e 、本文作者 02 年从 Harvey Mudd College 的数学系本科毕业，他的本科毕业论文题目是： Kneser's Conjecture and its Generalizations , 其工作包括对上面提到的 Schrijver 的对 Lovász-Kneser 定理的推广的两种简化证明，专家们预言 Greene 创立的技巧将成为相关领域一种标准的手段。 Greene 由此赢得 2002 年 AMS-MAA-SIAM 颁发的 Morgan 奖，他的工作还被收入 Matousek 的前述教科书。 Greene 的本科论文指导教师 Su 教授指导了很多本科生进行组合拓扑方面的研究，在网上可以下载到 03 年 5 月由他指导完成的另一篇本科毕业论文，题目是： A Combinatorial Analogue of the Poincaré-Birkhoff Fixed Point Theorem 。我在图书馆拜读过不少注明是在本科生研究计划资助下完成的高水平学术文章，但还没机会见识过当今在中国大陆热闹非凡的本科生研究项目的成果。