

2017年秋季学期数学规划期末考试
2018-01-03, 星期三, 13:10—15:10, 东中院3-305
001-(2017-2018-1)MA322(教学班)

姓名 _____

学号 _____

分数 _____

1. (10分) 设 x_1, x_2 为非负整数, 且适合以下不等式

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 \leq 28, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ -8x_1 - 9x_2 \leq -32. \end{cases}$$

试说明 $x_2 \leq 3$ 。

2. (10分) 说明有限多个点的凸包一定可以表示为有限多个半空间的交。
3. (10分) 叙述线性规划弱对偶定理并给出证明。
4. (15分) 令 L 是 \mathbb{R}^m 的子空间, L^\perp 是 L 的正交补空间。证明以下陈述恰有一条成立:
- (1) 存在 L 中的一个非负向量 $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, 满足 $y_m > 0$;
 - (2) 存在 L^\perp 中的一个非负向量 $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, 满足 $u_m > 0$.
5. (25分) (1) 给出一个拟阵的对偶拟阵的定义。
(2) 说明一个线性拟阵的对偶拟阵还是一个线性拟阵。
(3) 给出互为对偶的两个拟阵的Tutte多项式之间的关系。
6. (15分) 假设你拥有一台机器, 从时刻0开始, 你可以利用这台机器完成一定的工作任务来获得收益。现给你提供一张任务列表, 上面有 n 个可选择的任务 $\{t_1, \dots, t_n\}$, 截止时间 d_j 之前完成 t_j 可获得的收益为 p_j 。假设机器在同一时刻最多进行一项任务, 每个任务完成都需要连续的一个单位时间, 执行不同任务之间的间隔时间可以忽略不计。为获得最大可能的收益, 你需要设计一种最佳的方案, 包括选择完成的任务种类以及完成任务的顺序。请设计算法用来寻找最佳方案, 并证明算法的合理性。

7. (15分) 设 E 为一个有限集合, $f : 2^E \mapsto \mathbb{R}$ 满足 $f(\emptyset) = 0$, 以及对所有 $X, Y \in 2^E$ 成立

$$f(X) + f(X \cap Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leq f(X) + f(Y).$$

取 $x \in [0, 1]^E \setminus \{\mathbf{0}\}$ 。

- (1) 说明 x 有唯一方式表达为

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{1}_{S_j},$$

其中 $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0, S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_m \supseteq \emptyset$ 。

- (2) 说明

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j f(S_j) = \max\left\{ \sum_{e \in E} x(e)z(e) : \sum_{e \in T} z(e) \leq f(T), \forall T \in 2^E \right\}.$$