

## 2016年编码与密码期末考试

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

2016年12月29日14: 00–15: 45

前6题选作4题, 每题20分; 后3题每题10分。得分超过100分以100分计。

**1** 给定一个字母表 $\mathcal{A}$ 。对于任意的 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 中的两个不同的元素 $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 和 $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , 定义一个整数

$$N(x, y) = \min\{n \geq 0 : x_n \neq y_n \text{ 或者 } x_{-n} \neq y_{-n}\}.$$

对于任意 $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , 定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 2^{-N(x, y)} & \text{if } x \neq y, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- (a) 证明:  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, d)$ 是一个度量空间。
- (b) 对 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 的子集 $X$ , 试证明:  $X$ 是移位空间当且仅当 $X$ 是 $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, d)$ 中移位不变的闭集。

**2** 对于给定的(不一定有限)字母表 $\mathcal{A}$ , 令 $X = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x_{i+n^2} \neq x_i, \forall i, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ 。若 $X \neq \emptyset$ , 试证明:  $|\mathcal{A}| > 3$ 。

**3** 令 $X$ 为一个移位空间。称 $w$ 是 $X$ 的一个“极小违规字”, 如果有 $w \notin B(X)$ , 且 $w$ 的任一真子字都属于 $B(X)$ 。令 $\mathcal{O} = \{w : w \text{ 是 } X \text{ 的极小违规字}\}$ 。试证明如下命题。

- (a)  $X = X_{\mathcal{O}}$ 。
- (b) 若 $X = X_{\mathcal{F}}$ , 则对每个 $w \in \mathcal{O}$ , 存在 $v \in \mathcal{F}$ , 使得 $v$ 包含 $w$ 作为子字, 但不包含其他的极小违规字作为子字。
- (c) 若 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ , 且 $X_{\mathcal{F}} = X$ , 则 $\mathcal{F} = \mathcal{O}$ , 即 $\mathcal{O}$ 是一个极小的禁止块集合。
- (d) 若 $X$ 是一个有限型移位系统,  $X = X_{\mathcal{F}}$ , 且 $\sum_{w \in \mathcal{F}} |w| = \sum_{w \in \mathcal{O}} |w|$ , 那么 $\mathcal{F} = \mathcal{O}$ 。

4 判断并说明, 以下实数是否可以作为某个不可约有限型移位系统的熵值:

(a)  $\log \sqrt{2}$ ;

(b)  $\log \frac{3}{2}$ ;

(c)  $\log(3 - \sqrt{2})$ ;

(d)  $\log \pi$ .

5 证明:  $S$ -间隙系统是有限型移位系统当且仅当  $S$  是有限集或  $S^c$  是有限集。

6 设  $[2]$  和  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  为给定的一对图的邻接矩阵。试说明可以从第一个图通过两次撕裂或者粘合操作得到第二个图, 并且一步撕裂或者粘合操作无法将一个图变为另一个。

7 令  $X$  表示上下文无关系统。

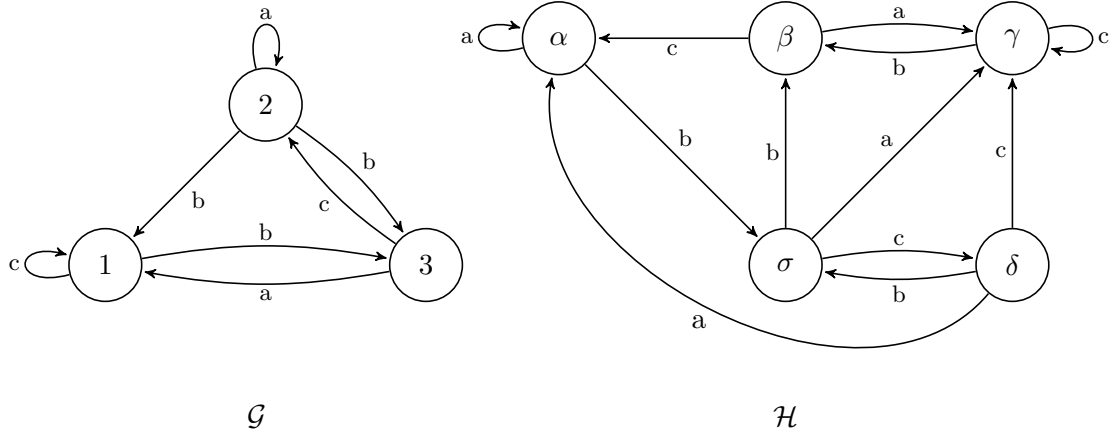
(a) 计算  $X$  的所有跟随集合。

(b) 证明: 上下文无关系统  $X$  不是商有限型系统。

(c) 画出  $X$  的跟随集合图  $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ 。

(d) 证明或证伪:  $X = X_{\mathcal{G}}$ 。

8  $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L}_1), \mathcal{H} = (H, \mathcal{L}_2)$  如下图所示:



- (a) 证明:  $X_{\mathcal{G}} = X_{\mathcal{H}}$ 。
- (b) 证明:  $\mathcal{H}$  是  $X_{\mathcal{H}}$  的极小右决表示。
- (c) 证明: 若  $X_{\mathcal{G}'} = X_{\mathcal{G}}$ , 则  $|V(\mathcal{G}')| \leq |V(\mathcal{G})|$ 。
- (d) 是否存在标号图  $\mathcal{G}'$  使得  $X_{\mathcal{G}'} = X_{\mathcal{G}}$ ,  $|V(\mathcal{G}')| = |V(\mathcal{G})|$  并且  $\mathcal{G} \not\cong \mathcal{G}'$  (标号图同构意义下)?

9 试判断: 移位系统  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  与  $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$  是否共轭等价?