2010年秋数理科学班线性代数课程教学大纲

§1　目标

本课程是数学和相关学科（如理论物理，计算机科学）的入门课程，是大学数学课程的重要基础。我们希望追溯每一个概念的历史由来，让学生看到线性代数思想的丰富起源。除了讲授基本理论以外，我们希望强调线性代数的无所不在，提醒学生注意如何进行建模，把看似不相干的(理论或应用)问题转化为线性代数问题。除了从一开始就强调coordinate-free的抽象思维方式，强调从作用的观点来理解线性空间和线性变换外，我们也注意讲授应用数学中有广泛用途的矩阵技巧，尤其提醒学生注意华罗庚先生和许宝騄先生发展的独具中国特色的计算技巧。本课程也希望提示学生了解线性代数与若干后续课程或者前沿课题的联系，引导有余力的学生自己学习相关更深入的专题。

§2　教学内容

§2.1　代数系统，线性范畴，对偶函子及其坐标表示

数的进化与代数系统。什么是代数：把各种对象，包括几何对象，设法坐标化并由此加以研究的一种努力。

线性空间是可以谈论线性组合的地方，线性变换是与线性组合运算可交换(保线性结构)的变换。

强调线性空间的结构中包括一个abel群结构，一个域结构，然后由域中元素在abel群上保结构的作用把二者关联起来形成一个整体。在同一个集合上可以定义不同的abel群结构，不同的数乘，从而可以有非常奇特的向量空间。

线性空间的同构，同构的向量空间的不同表现。电网络上的调和函数（Dirichlet原理）。

线性空间的基底。给定空间的基底以后，线性空间中的向量被坐标化（行向量与列向量，一组坐标函数），线性空间被坐标化（一组行或列向量），线性映射被坐标化（矩阵以及向量与矩阵相乘），映射复合被坐标化（一般矩阵乘法，包括简单的张量积记号），以及不同坐标化之间的关系（矩阵的相抵与相似）。

多项式空间的各种不同基底。

线性范畴与中学学习的集合范畴的一些比较。

对偶空间，对偶基，对偶映射以及相应的坐标化。有限维空间与其对偶空间之间的同构和互为对偶。

线性空间的基底推广到空间的直和分解，从矩阵到分块矩阵和算子矩阵。

§2.2 矩阵乘法和矩阵代数

线性代数的核心是理解矩阵乘法。

复数，四元数代数作为矩阵代数的子代数，平面反射群的矩阵表示和四元数表示，矩阵乘法的图论解释。同态的想法。

左行右列，分块矩阵，Schur公式。将给定矩阵拆成一串“简单”矩阵的乘积。通过各种例子体会矩阵打洞（广义Gauss消去）技巧。

矩阵乘法的应用：强正则图，Mobius变换以及其迭代产生的动力系统，线性递归数列，Cauchy矩阵的逆矩阵。

矩阵乘法的计算复杂性一瞥。

由矩阵的迹映射的特征刻画来引入这一概念；通过张量的湮灭运算来引入线性映射的迹映射，并说明其坐标化与矩阵定义一致，从而迹是矩阵相似不变量。矩阵乘法也是湮灭运算的特例。

通过迹这个不变量来处理矩阵代数若干问题的一些例子。

特征为零的域上的迹零方阵一定相似于对角元素全为零的矩阵，也一定可以表达为矩阵换位子。

§2.3 行列式

平行多面体的体积与单纯形的体积的直观推导（棱柱算子），并由此引出（有向）体积概念，即行列式为交错的相对于一组给定基底规范化的多重线性函数。

Cauchy对全对称群上符号函数存在性的证明。符号函数的基本性质。行列式函数的存在唯一性以及坐标表示（矩阵的行列式）。一个方阵和其转置的行列式相等。

体积变换率与行列式函数的可乘性。利用坐标计算得到行列式函数可乘性。利用行列式函数的刻画以及存在唯一性得到行列式函数可乘性。行列式函数的可乘性在一定条件下是行列式函数的代数刻画。

Laplace展开公式。伴随矩阵，Cramer法则。

Cauchy矩阵行列式，范德蒙矩阵行列式

Jacobi行列式恒等式，Sylvester行列式恒等式。利用Laplace展开证明Grassmann–Plucker恒等式。

正交阵，酉阵，辛矩阵的行列式（相应于实数，复数，四元数和正交群，酉群，辛群）。

通过环同态和Laplace展开来证明一般含幺交换环上的Cayley-Hamilton定理。特征多项式，特征值，行列式与特征值的关系。

关于path matrix行列式的Gessel–Viennot引理。利用Gessel–Viennot引理获得Binet–Cauchy公式，含幺交换环上自由模的维数不变性（从而维数是向量空间同构的全系不变量）以及一个方阵和其转置的行列式相等。

由行列式函数可乘性以及矩阵的行列式函数来定义线性变换的行列式函数。

多重线性函数空间的标准基以及该空间的坐标化。交错多线性型所成线性空间以及坐标化。交错化算子。利用交错化算子理解行列式函数。定向线性空间。

线性变换的行列式的直接定义：对n维向量空间上线性自同态T, $\det T$是唯一的常数c使得对任意向量$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$和任意交错$n$线性型$L$成立$L(T\alpha_1, \ldots, T\alpha_n) = cL(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

行列式不等于零对应着空间的一组基，对应着可逆线性变换，对应着可逆矩阵。

交错型外积的定义，反对称性以及Grassmann环。外代数是集合上的布尔代数的线性化。

矩阵乘积的行列式与交错型在一组向量上的取值。在Grassmann环的框架中再次得到Laplace展开，Binet–Cauchy公式。

利用任一有限维空间是其对偶空间的对偶空间，定义向量的张量积和外积，得到线性无关向量组的外积刻画，线性空间的子空间的坐标化，Plucker坐标，作为Plucker坐标的刻画的Grassmann–Plucker恒等式。

复合矩阵与行列式恒等式。Pfaffian的基本性质以及利用它再次计算辛矩阵的行列式（Artin的证明）。

§2.4 线性空间与线性方程组，矩阵相抵，秩，矩阵相似，Jordan标准型

初等行变换与域上矩阵的Gauss消去法。矩阵的行既约阶梯型及其唯一性。矩阵相抵的Hermite标准型。每一个可逆矩阵A可以写成一个置换阵P，一个下三角且对角元均为1的矩阵L，一个对角矩阵D，以及一个上三角且对角元均为1的矩阵U的乘积,并且当P可以取为单位阵时，L, D, U由A唯一决定。

线性变换像空间的维数，域上矩阵的行秩，列秩行列式秩三者相等（换成四元数就不成立）。

秩的基本性质。Frobenius秩不等式。Graham–Pollack定理及其推广。连通图的Laplace矩阵的任一个真主子式非零。利用Laplace矩阵确定等效电阻。

自由变量对应解空间的基底（解空间维数），非自由变量对应主元（相应矩阵的秩），由此给出线性代数基本定理：变量个数（原空间维数）等于核空间维数加上像空间维数。线性方程组的解的结构定理。Fredholm alternative （比较线性范畴与集合范畴中的单射与满射的关系）。

任一满秩方阵可写成第一类和第二类初等矩阵（平延）的乘积。行列式为1的方阵是平延的乘积。相抵关系的几何意义（一般线性变换群在同维数子空间上的可迁作用）

Hermite标准型的各种应用。

辗转相除法与多项式环（整数环）上矩阵的Smith标准型

行列式因子，初等因子，不变因子。多项式矩阵以及整数矩阵的Smith标准型的存在唯一性。

矩阵相似与对应的算子矩阵的相抵的等价以及由算子矩阵的相抵过程得出相应矩阵相似的过渡矩阵。友阵，Jordan块和广义Jordan块。Jordan标准型。关于一组矩阵的秩作为复矩阵相似全系不变量的Weyl定理以及由这些数值确定复矩阵Jordan标准型。特征多项式是所有不变因子的乘积，极小多项式是最高阶不变因子。

Jordan标准型的几何意义（空间第一和第二分解定理，初等因子）。循环子空间分解与Frobenius有理标准型（不变因子）。Jordan标准型的组合确定。次数为n的多项式在次数不超过n的域上多项式所成空间上定义的移位算子，该移位算子在适当的

基底下坐标表示分别为该多项式的友阵以及其转置。广义范德蒙矩阵作为友阵与相应Jordan标准型之间相似的过渡矩阵。

实方阵的实相似的各种标准型。矩阵函数。欧式空间中的旋转与反对称矩阵。单纯矩阵与循环变换。半单线性变换。空间直和分解在半单线性变换的不变子空间上的限制。半单线性变换的所有不变子空间。特征零的域上的矩阵（一般的，完全域上矩阵）的加法Jordan－Chevalley分解和可逆矩阵的乘法Jordan－Chevalley分解。方阵的中心化子。可交换矩阵的同时对角化。

§3 主要教学参考材料

- Egbert Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie, Vieweg, 1985.
- P.R. Halmos, Finite-Dimensional Vector Space, Springer, 1987.
- P.A. Fuhrmann, A Polynomial Approach to Linear Algebra, Springer, 1996.
- A.I. Kostrikin, Yu I. Manin, Linear Algebra and Geometry, Gordon and Breach Science Publishers, 1997.
- Douglas R. Farenick, Algebras of Linear Transformations, Springer, 2000.
- K. Tapp, Matrix Groups for Undergraduates, AMS, 2005.
- P.D. Lax, Linear Algebra and Its Applications, Second Edition, Wiley, 2007.
- K. Hoffman, R. Kunze, Linear Algebra, second edition, Beijing World Publishing Corporation, 2008.
- Richard A. Brualdi, Dragos Cvetkovic, A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications, Chapman and Hall/CRC, 2008.
- Kazuo Murota, Matrices and Matroids for Systems Analysis, Springer, 2009.
- 李乔，矩阵论八讲，上海科学技术出版社，1988。
- 蓝以中，高等代数教程，北京大学出版社，1988。
- 张贤科，许甫华，高等代数学, 清华大学出版社，2004。
- 龚昇，线性代数五讲，科学出版社，2005。
- 李尚志，线性代数，高等教育出版社，2006。
- 许以超，线性代数与矩阵论，高等教育出版社，2008。
- 李炯生，查建国，王新茂，线性代数，中国科学技术大学出版社，2009。
- 华罗庚（著），王元（校），高等数学引论（第四册），高等教育出版社，2009。
- 蓝以中，高等代数简明教程（上，下），第二版，北京大学出版社，2010。