理科班线性代数小测验（一）

姓名：　　　　　　　　　　　　　　学号：

(甲) 设 A 为 n 阶实方阵，v 为 n 维列向量。试说明 $Av=0$ 当且仅当 $A^{\top}Av=0$。

(乙) 请把 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 分别写成形如 $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ 的矩阵的连乘积。

(丙) 令 $V=M_n(F)$ 为域 F 上 n 阶方阵全体所成线性空间。对任给 $f\in V^*$，试说明存在 $A\in V$ 使得对任意 $X\in V$ 都有 $f(X)=Tr(AX)$。

(丁) 设 A 与 B 为任意两个 n 阶方阵。试证明 AB 与 BA 的特征多项式一致。

(戊) 设 V 为有限维向量空间，$f\in Hom(V,V)$，$f^*\in Hom(V^*,V^*)$ 为 f 的共轭映射。试说明 $\det f=\det f^*$。

(己) 令 V 为实数域上 2 阶方阵全体所成线性空间。对所有 $A\in V$ 定义 $\phi(A)=A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$。试说明 $\phi\in Hom(V,V)$ 并计算 $\det\phi$ 和 $Tr(\phi)$。

(庚) 利用行列式函数的交错多重线性以及规范化的特征性质来证明 $\det AB=\det A\det B$。