许以超 P232 6.4.20 K. Shoda (1936) Japan J. Math. 13, pp. 361-365.

设 A 为 n 阶方阵，且 $tr(A)=0$，试证：① A 相似于 n 阶方阵 B，其中 B 的对角元素都是零。② 又存在 n 阶方阵 X, Y，使得 $[X,Y]=XY-YX=A$。

证明：对 n 归纳。$n=1$ 显然。只用讨论 $A\neq 0$ 的情况，从而 A 不是单位矩阵的倍数，$n\geq 2$。

下面说明一定有向量 v，使 v 与 vA 线性无关。否则，由于 A 不是单位矩阵倍数，知道有线性无关向量 v_1, v_2，使 $v_1A=\lambda_1 v_1$，$v_2A=\lambda_2 v_2$，$\lambda_1\neq\lambda_2$；但这导致 v_1+v_2 与 $(v_1+v_2)A$ 线性无关。

选可逆矩阵 $U=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}$，使得 $v_2=v_1A$，则 $UAU^{-1}(1,1)$

$$= v_1AU^{-1}(1,1) = v_2U^{-1}(1,1) = UU^{-1}(2,1)=0.$$

即 $UAU^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & B\end{pmatrix}$，　$Tr\,B = Tr\,(UAU^{-1}) = Tr\,A = 0$.

由归纳假设，有 $(n-1)$ 阶矩阵 P 使 PAP^{-1} 的对角元全为零。

从而对 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & P\end{pmatrix}U=Q$，有 QAQ^{-1} 的对角元全为零。

注：上述论证要求 A 为域 F 上矩阵，且对任意 $k\in\{1,\cdots,n\}$，任意 $a\in F\setminus\{0\}$，有 $ka\neq 0$。

由归纳假设，有 $B=RS-SR$，从而 $B=R_tS-SR_t$，$R_t=R+tI_{n-1}$.

如果域 F 至少有 n 个不同元素，则一定有 $t\in F$，使 R_t 可逆，从而 $UAU^{-1}=XY-YX$，$A=U^{-1}XU\cdot U^{-1}YU - U^{-1}YU\,U^{-1}XU$，这儿

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} 0 & -\alpha R_t^{-1} \\ R_t^{-1}\beta & S\end{bmatrix}.$$

From the standpoint of classical algebra, the algebraic eigenvalue problem has been completely solved. The problem is the subject of classical similarity theory, and the fundamental result is embodied in the Jordan canonical form. Golub and Wilkinson, SIAM Review 18 (1976) 578-619

定理：A 与 B 相似 等价于 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵。

证明：$\Rightarrow$) $A=P^{-1}BP \Rightarrow \lambda I-A = P^{-1}(\lambda I-B)P$.

$\Leftarrow$) 设 A 是线性映射 $\alpha\in \mathrm{End}(V)$ 在基 $e_1,\cdots e_n$ 下的坐标表示，即

$$(\alpha I-A)\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix}=0. \qquad (*)$$

设 $\lambda I-A = P(\lambda)(\lambda I-B)Q(\lambda)$，$P(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$ 可逆

以 $\lambda=\alpha$ 代入，有 $(\alpha I-A)=P(\alpha)(\alpha I-B)Q(\alpha)$.

令 $\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix} = Q(\alpha)\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix}$，则 $(\alpha I-B)\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix}=(\alpha I-B)Q(\alpha)\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix}=$

$$P^{-1}(\alpha)\,P(\alpha)(\alpha I-B)Q(\alpha)\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix}=P^{-1}(\alpha)\,(\alpha I-A)\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix}\overset{(*)}{=}0 \qquad (**)$$

$Q^{-1}(\alpha)=\sum_{i\geq 0} M_i\,\alpha^i$，$M_i$ 为 $n\times n$ 矩阵，

定义 $Q^{-1}(B)=\sum_{i\geq 0} M_i B^i$ $\longleftarrow$ [$Q^{-1}(B)$ 也可由带余除法来定义：$Q^{-1}(\lambda)=(\lambda I-B)\cdot D(\lambda)+Q^{-1}(B)$]

$$\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix}=Q^{-1}(\alpha)\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix}\overset{(**)}{=}Q^{-1}(B)\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix}$$

$x\,Q^{-1}(B)=0 \Rightarrow x\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x=0$ 故而 $\overset{T}{\overset{\parallel}{Q^{-1}(B)}}$ 可逆，$\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix}$ 也是空间 V 的基。

$(**)$ 表明 α 在 $\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix}$ 这组基下的坐标表示为 B，

这给出 $A=TBT^{-1}$。 $\blacksquare$

注意：[illegible]

$$p(\lambda) = \lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + a_0$$

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ & & & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

<u>companion matrix of $p(\lambda)$</u>

$$\lambda I - C(p) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & & & \\ & & -1 & \lambda & & a_i \\ & & & -1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots\ \lambda & a_{d-2} \\ & & & & -1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$$

i个 $\quad$ $d-1-i$个

$$\det(\lambda I - C(p)) = \sum_i a_i \cdot \lambda^i \cdot (-1)^{d-1-i} \cdot (-1)^{i+1+d}$$

$$= \sum a_i \lambda^i = p(\lambda)$$

∴ $\lambda I - C(p)$ 的行列式因子 $1, 1, \cdots, 1, p(\lambda)$.
不变因子: $1, \cdots, 1, p(\lambda)$

单纯方阵 ⟺ 特征多项式=最小多项式 ⟺ 相似于其特征多项式的友阵 ⟺ 该方阵与某一向量所生成的循环子空间是全空间

若 $\lambda I - A$ 的不变因子为 $d_1(\lambda) | \cdots | d_n(\lambda)$, $s = \min\{i \mid \deg d_i(\lambda) \geq 1\}$.

则 A 相似于

$$\begin{pmatrix} C(d_s) & & & \\ & C(d_{s+1}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C(d_n) \end{pmatrix}$$

$$n = \sum_{i=1}^n \deg d_i = \sum_{i=s}^n \deg d_i = \sum_{i=s}^n \mathrm{size}(C(d_i))$$

Frobenius Normal Form (Rational Normal Form)

(由有理标准形直接看出迹为零的单纯方阵相似于对角线全为零的矩阵,对域的特征无任何要求!

设方阵A的特征多项式等于其最小多项式。请说明与A可交换的方阵全体恰为A的多项式全体.

证明:"特征多项式=最小多项式"蕴含了$\lambda I-A$只有一个非平凡不变因子$\underset{\det(\lambda I-A)}{\underset{\shortparallel}{d_n(\lambda)}}$,从而$A$的有理标准形为

$$C(d_n(\lambda))=\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}。$$

假设$AB=BA$.

考虑线性算子$\mathcal{A}$: $F^{n\times 1}\longrightarrow F^{n\times 1}$ 和线性算子$\mathcal{B}$: $F^{n\times 1}\to F^{n\times 1}$

$x\longrightarrow Ax$ $\qquad$ $x\to Bx$

$\mathcal{A}$在基$\{e_1,\cdots,e_n\}$下坐标表示为$C(d_n(\lambda))$,即

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_1)=e_2 \\ \mathcal{A}(e_2)=e_3 \\ \quad\vdots \\ \mathcal{A}(e_{n-1})=e_n \\ \mathcal{A}(e_n)=-a_0e_1-\cdots-a_{n-2}e_{n-1}-a_{n-1}e_n \end{cases}$$

即$\{e_1,\mathcal{A}e_1,\cdots,\mathcal{A}^{n-1}e_1\}=\{e_1,\cdots,e_n\}$为$V=F^{n\times 1}$的基。 $(*)$

从而有次数至多为$n-1$的多项式g,使$\mathcal{B}e_1=g(\mathcal{A})e_1$.

欲说明B为A的多项式,只消说明$\mathcal{B}=g(\mathcal{A})$,即$\forall\, w\in V$,有$\mathcal{B}w=g(\mathcal{A})w$.

由$(*)$可设$w=h(\mathcal{A})e_1$.

这给出:$\mathcal{B}w=\mathcal{B}\,h(\mathcal{A})e_1=h(\mathcal{A})\mathcal{B}e_1=h(\mathcal{A})\,g(\mathcal{A})e_1$

$=g(\mathcal{A})\,h(\mathcal{A})e_1=g(\mathcal{A})\,w.$ ▨

Jordan block

$$J_d(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}_{d\times d}$$

$\lambda I - J_d(a)$ 行列式因子 $1, \cdots, 1, (\lambda - a)^d$

$\lambda I - J_d(a)^T$ 行列式因子 $1, \cdots 1, (\lambda - a)^d$

$\therefore J_d(a)$ 与 $J_d(a)^T$ 相似

$\left(其实 \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix} J_d(a) \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix} = J_d(a)^T \right)$

Ex: 任一复方阵 A 与其转置在复数域上相似.

Generalized Jordan block

多项式 $p(\lambda)$, $J(p^s) = \begin{pmatrix} C(p) & F & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & F \\ & & & C(p) \end{pmatrix}_{st\times st}$ (t个)

$\deg p = s$, $F = \begin{pmatrix} & & \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{s\times s}$

补上 $t-1$ 个 F 是为了让 $J(p^s)$ 中出现一条 $st-1$ 个 1 组成的副对角线

$\lambda I - J(p^s)$ 的行列式因子为 $1, \cdots, 1, p(\lambda)^s$。

不变因子为 $1, \cdots, 1, p(\lambda)^s$。

"一个人生活在世上,就好像水泥搅拌器里的石子一样,运转起来以后,身不由己。"他在回忆录里这样感慨。而他的一生就像是一个身不由己,却顽强地寻找自己轨迹的石子。谁能想到,这个曾费尽心机编造假文凭的年轻人,到了晚年时会被称作"中国的伏尔泰",这也许是生活在种种悲剧和阴影之中的中国人身上,最光辉灿烂的东西。

许知远,祖国的陌生人, p.149.

设 A 与 B 为 n 阶实矩阵。如果有复可逆矩阵 P 使得 $PAP^{-1}=B$，则一定有实可逆矩阵 Q 使 $QAQ^{-1}=B$。

证明：设 $P=P_1+iP_2$，P_1，P_2 为实矩阵。

令 $P(t)=P_1+tP_2$，$f(t)=\det(P(t))$.

$f(i)\neq 0 \Rightarrow f(t)$ 不是零多项式 $\Rightarrow \exists$ 实数 r，使得 $f(r)\neq 0$，即 $P(r)$ 为可逆实矩阵。

$PA-BP$ 的实部 $=$ $P(t)A-BP(t)$ 的~~常数~~ t^0 系数

$PA-BP$ 的虚部 $=P(t)A-BP(t)$ 的 t 系数

$\because PA=BP \Rightarrow P(t)A-BP(t)=0$ 是关于未定元 t 的恒等式

$\therefore$ 取 $Q=P(r)$ 即可！ ▨

实矩阵 A 的初等因子中非实多项式部份必成对出现，每一~~列~~对都形如 $(\lambda-a)^m$，$(\lambda-\bar{a})^m$，$a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

证明：$\lambda I-A$ 的不变因子均为实系数多项式。

实多项式的任一非实根的重数与其共轭的重数相同。

$f\in R[\lambda]$，　$f(a)=0$

$\Rightarrow 0=\bar{0}=\overline{f(a)}=f(\bar{a})$. ▨

再考虑 $\dfrac{f(\lambda)}{(\lambda-a)(\lambda-\bar{a})}\in R[\lambda]$，……

实方阵的实相似标准形　　A为实矩阵

$$A \overset{\text{复相似}}{\sim} \begin{pmatrix} J_{d_1}(r_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{d_p}(r_p) & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} J_{c_1}(a_1+ib_1) & \\ & J_{c_1}(a_1-ib_1) \end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} J_{c_q}(a_q+ib_q) & \\ & J_{c_q}(a_q-ib_q) \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{复相似}}{\sim} \begin{pmatrix} J_{d_1}(r_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{d_p}(r_p) & & \\ & & & J_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J_q \end{pmatrix} = J$$

$r_1, \cdots, r_p \in R$

$J_1, \cdots, J_q$ 为实矩阵

则 J 与 A 实相似。

如何构造与 $\begin{pmatrix} J_{c_1}(a_1+ib) & \\ & J_c(a-ib) \end{pmatrix}$ 相似的好的实矩阵？

$\parallel J_c(a+ib, a-ib)$

$\lambda I - J_c(a+ib, a-ib)$ 的初等因子为 $(\lambda-a-ib)^c$, $(\lambda-a+ib)^c$,

不~~等~~变因子为 $1, \cdots 1$, $(\lambda^2-2a\lambda+(a^2+b^2))^c$

从而实矩阵 $J(p^c) = \begin{pmatrix} C(p) & F & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & F \\ & & & C(p) \end{pmatrix}$ 与 $J_c(a+ib, a-ib)$ 相似.

这儿 $p(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2+b^2)$。

2010锐词　　NEW WEEKLY 新周刊 2010大盘点　P184

[悲催] 悲惨得催人泪下。常用句式：我们都是悲催的娃。豆瓣网上有网友如此描述悲惨的情形之一：用考试消耗他们的精力，用分数限制他们的追求，用升学压迫他们的心智，用各种被阉割的知识迷惑他们的认知，用前途莫测的就业转移他们的求索，最后再在他们头顶压上一套房子，然后，这个世界一下就安静了。

$$\begin{pmatrix} a+bi & \\ & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{-i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m(a+bi) & \\ & J_m(a-bi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_j &= e_j + f_j \\ h_j &= -ie_j + if_j \end{aligned} \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$\alpha \begin{pmatrix} g_1 \\ h_1 \\ g_2 \\ h_2 \\ \vdots \\ g_m \\ h_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} a & b & 1 & & & & \\ -b & a & & 1 & & & \\ \hline & & a & b & \ddots & & \\ & & -b & a & & & \\ \hline & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \ddots & & 1 \\ \hline & & & & & a & b \\ & & & & & -b & a \end{array}\right) \begin{pmatrix} g_1 \\ h_1 \\ g_2 \\ h_2 \\ \vdots \\ g_m \\ h_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha g_j = \alpha e_j + \alpha f_j &= (a+bi)e_j + e_{j-1} + (a-bi)f_j + f_{j-1}, \qquad e_0 = f_0 = 0 \\ &= a(e_j + f_j) - b(-ie_j + if_j) + e_{j-1} + f_{j-1} \qquad g_0 = h_0 = 0 \\ &= a g_j - b h_j + g_{j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha h_j = -i\alpha e_j + i\alpha f_j &= -i(a+bi)e_j + i(a-bi)f_j - ie_{j-1} + if_{j-1} \\ &= b(e_j + f_j) + a(-ie_j + if_j) + h_{j-1} \\ &= b g_j + a h_j + h_{j-1} \end{aligned}$$

$\therefore$ 与 $\begin{pmatrix} J_m(a+bi) & \\ & J_m(a-bi) \end{pmatrix}$ 相似的"好"的实矩阵可以选为 $\begin{pmatrix} T & I & & \\ & T & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & T \end{pmatrix}$ （m个 T），$T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 由此得相应的实矩阵实相似标准形！

设 $AB=BA$，A 与 B 都可以对角化。试说明 A 与 B 可以同时对角化。

证明：A 相似于对角阵 $\Longrightarrow V=\bigoplus_{i=1}^{s} V_{\lambda_i}$，$\lambda_i$ 互异，$V_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(\lambda_i I-A)$

B 相似于对角阵 $\Rightarrow V=\bigoplus_{i=1}^{t} W_{\mu_j}$，$\mu_j$ 互异，$W_{\mu_j}=\mathrm{Ker}(\mu_j I-A)$

下证 $V_{\lambda_i}=V_{\lambda_i}\cap V=V_{\lambda_i}\cap\left(\bigoplus_{j=1}^{t} W_{\mu_j}\right)\overset{?}{=\!=}\bigoplus_{j=1}^{t}\left(V_{\lambda_i}\cap W_{\mu_j}\right)$

若(?)成立，在每个 $V_{\lambda_i}\cap W_{\mu_j}$ 中取基再拼成 V 的基，则在该基下，A 与 B 同时化为对角阵

注意：一般而言，$U\cap\left(\bigoplus_i W_i\right)\neq\bigoplus_i\left(U\cap W_i\right)$

$\forall x\in V_{\lambda_i}$，$\exists x_1\in W_{\mu_1},\cdots,x_t\in W_{\mu_t}$，满足 $x=x_1+\cdots+x_t$

于是有
$$\begin{pmatrix}x\\ Bx\\ \vdots\\ B^{t-1}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ \mu_1&\mu_2&\cdots&\mu_t\\ \vdots&&&\\ \mu_1^{t-1}&\mu_2^{t-1}&\cdots&\mu_t^{t-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_t\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \mu_1&\cdots&\mu_t\\ \vdots&&\\ \mu_1^{t-1}&\cdots&\mu_t^{t-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ Bx\\ \vdots\\ B^{t-1}x\end{pmatrix}$$

$AB=BA$ 保证：$\forall x\in V_{\lambda_i}$，

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & \lambda_i x \arrow[d, "B"] \\ Bx \arrow[r, "A"] & \lambda_i Bx \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow V_{\lambda_i}$ 是 B 的不变子空间

$\Rightarrow x, Bx,\cdots,B^{t-1}x\in V_{\lambda_i}$

综上，$x_1,\cdots,x_t\in V_{\lambda_i}$ 且被 x 所唯一决定

即 $V_{\lambda_i}=\bigoplus_{j=1}^{t}\left(V_{\lambda_i}\cap W_{\mu_j}\right)$. $\blacksquare$

不要假装我们是一个文明古国了，传统早已割裂，我们是一个无根的民族，精神一片荒芜，伪造出的传统只加剧了我们的虚伪，凸显了我们的空洞与脆弱。 ——许知远，向南方——一次穿越中国的旅行

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \{ A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1 \}$$

Clearly, $\mathbb{Z} = \{ \operatorname{Tr} A \mid A \in SL(2,\mathbb{Z}) \}$.

An $\boxed{\text{open question}}$ on $SL(2,\mathbb{Z})$ is

(Newman's Problem): Is there a proper subgroup of $SL(2,\mathbb{Z})$ which contains an element of trace z for all $z \in \mathbb{Z}$?

— Thomas J. Laffey, Lectures on Integer Matrices, P.7.

Exercise: Let n be a positive integer and C, D be two nonsingular matrices such that $C^n = D^n$. Suppose that whenever λ is an eigenvalue of C and μ is an eigenvalue of D such that $\lambda^n = \mu^n$, we have that $\lambda = \mu$. Then $C = D$.

(For a proof, see: Lemma 7.5.16, in: D. Lind, B. Marcus, An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding, Cambridge Univ. Press, 1995)

Exercise:

(A Theorem of Frankl and Wilson): Let p be a prime and $1 < k < n$; furthermore, let $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_r$ be distinct residues modulo p, with $k \equiv \mu_0 \pmod p$. Let $\mathcal{F}$ be a collection of k-subsets of $[n]$ such that if A and B are distinct elements of $\mathcal{F}$ then there is an index i, $1 \le i \le r$, such that

$$|A \cap B| \equiv \mu_i \pmod p,$$

and every μ_i occurs in one of these relations. Then $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{r}$.

(For a proof, see Problem 131, in: Béla Bollobás, The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis, Cambridge Univ. Press, 2006.)

Exercise:

设 $n+2$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+2}$ 不共 n 维面，点 $B_1, \cdots, B_{n+2}$ 分别在线段 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n+2}A_1$ 上（或其延长线上），且各与 $A_1, \cdots, A_{n+2}$ 相异。则 $B_1, \cdots, B_{n+2}$ 共一个 n 维面的充要条件是

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdots \frac{A_{n+2}B_{n+2}}{B_{n+2}A_1} = (-1)^{n+2} = (-1)^n.$$

（参见：许振荣，点之线性相关，线性无关及其应用，数学传播，台湾中研院数学所）

Exercise: 求证：

$$\det\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b & 3ab^2 & b^3 \\ a^2c & a^2d+2abc & b^2c+2abd & b^2d \\ ac^2 & bc^2+2acd & ad^2+2bcd & bd^2 \\ c^3 & 3c^2d & 3cd^2 & d^3 \end{pmatrix} = \left(\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^6.$$

Exercise: Let A be an $m\times m$ matrix and B an $n\times n$ matrix. Then the matrix equation $AX - XB = C$ has a unique solution X for every $m\times n$ matrix C if and only if $\mathrm{spec}(A) \cap \mathrm{spec}(B) = \phi$.

(J.J. Sylvester, Sur l'équation en matrices $px = xq$, C.R. Acad. Sci. Paris 99 (1884) 67-71 and 115-116)