上 海 交 通 大 学 试 卷 (A 卷)

(2010 至 2011 学年 第 1 学期)

班级号 ______________ 学号 ______________ 姓名 ______________

课程名称 线性代数 成绩 ______________

一. (40 分) 设 V 为关于未定元 λ 的实系数多项式空间, $p=\lambda^d+p_{d-1}\lambda^{d-1}+\cdots+p_0\in V$ 为一个次数为 $d>0$ 的多项式。对任意 $f\in V$, 令 $\pi_p(f)$ 为唯一的次数小于 d 且使得 $f-\pi_p(f)$ 被 p 所整除的多项式。

1 、说明 V 是 $Im(\pi_p)$ 和 $Im(Id-\pi_p)$ 的直和。

2 、对任意 $g\in Im(\pi_p)$ ，令 $S_p(g)=\pi_p(\lambda g)$ 。计算线性变换 S_p 分别在 $Im(\pi_p)$ 的基底 $\mathscr{B}_1=\{1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{d-1}\}$ 和 $\mathscr{B}_2=\{\lambda^{d-1}+p_{d-1}\lambda^{d-2}+\cdots+p_1,\lambda^{d-2}+p_{d-1}\lambda^{d-3}+\cdots+p_2,\cdots,\lambda+p_{d-1},1\}$ 之下的坐标表示 M_1 和 M_2 ，并且构造可逆矩阵 T 使得 $TM_1T^{-1}=M_2$ 。

3 、设 $q=(\lambda-2)^2+9,p=q^3$ 。计算 S_p 在基底 $\{3,\lambda-2,3q,(\lambda-2)q,3q^2,(\lambda-2)q^2\}$ 之下的坐标表示。

4 、设 A 为一个实矩阵，且 $\lambda I-A$ 的不变因子只有一个，为 $(\lambda^2-4\lambda+13)^3$ 。试说明 A 实相似于 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & & & & \\ 3 & 2 & & & & \\ & 9 & 2 & 3 & & \\ & & -3 & 2 & & \\ & & & 13 & 2 & -3 \\ & & & & 3 & 2 \end{bmatrix}$。

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人： ____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
批阅人 (流水阅卷教师签名处)											

二. (20 分) 1 、令 $A=\begin{bmatrix} 0 & x_1 & & & \\ & 0 & x_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & x_{504} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 为环 R 上的两个 505 阶方阵。试说明可以通过选择 $x_1,\ldots,x_{504}$ 的取值使得 $AB-BA=I$ 当且仅当在环 R 中成立 $505=0$ 。

2 、试说明不存在两个实数域 $\mathbb{R}$ 上的 505 阶方阵 A 和 B 使得 $AB-BA$ 是单位阵。

三. (10 分) 设 A 为一个 $k\times n$ 实矩阵，且它的每一个 k 阶子式都非零。设 α 与 β 是 A 的行空间中两个不同的向量，试证明 $\#\{i:\ \alpha_i\neq\beta_i\}\geq n-k+1$ 。

四．[20 分] 填空

1、设 $(\sum_i M_i\lambda^i)(\sum_i N_i\lambda^i)=I, (\sum_i M_i\lambda^i)(\lambda I-B)(\sum_i N_i\lambda^i)=\lambda I-A$, 其中 M_i, N_i, A, B 都为域 F 上方阵，λ 为未定元。则 $\sum_i M_iB^i$ 的逆矩阵是 **A** 。

2、对于矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 8 & -28 & 38 & -25 & 8 \end{bmatrix}$，使得 $TAT^{-1}=B$ 成立的矩阵 T 可以选取为 **B** 。

3、在所有次数至多为 3 的以 t 为单变量的复系数多项式上作用的微分算子 $\frac{d^2}{dt^2}-5\frac{d}{dt}$ 的 Jordan 标准型为 **C** 。

4、设 $A=\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 \\ 1 & \nu & \nu^2 & \nu^3 & \nu^4 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \end{bmatrix}$ 为一个可逆矩阵，且 A^{-1} 的第一列的转置为 $(\ b_{00}\quad b_{10}\quad b_{20}\quad b_{30}\quad b_{40}\ )$。则多项式 $f(x)=b_{40}x^4+b_{30}x^3+b_{20}x^2+b_{10}x+b_{00}$ 的根的集合为 **D**，$\frac{b_{30}}{b_{40}}=$**E** 。

5、设 A 为 9 阶复方阵，$\lambda I-A$ 的不变因子为 $\lambda^3(\lambda^2-1)(\lambda^2-4\lambda+3), \lambda(\lambda+1)$, $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ 。则 A 的 Jordan 标准型为 **F**，A^2 的 Jordan 标准形为 **G** 。

A：________________

B：________________

C：________________

D：________________ **E**：________________

F：________________ **G**：________________

五. (30 分) 判断题（每一小题答对得 2 分，答错倒扣 2 分，不答得 0 分）

1、令 $\mathbb{C}^X$ 为集合 X 上复值函数全体所成线性空间，令 ϕ 为 X 上一个双射. 对 $f \in \mathbb{C}^X, x \in X$，令 $(\phi_* f)(x) = f(\phi^{-1}(x))$. 则 ϕ_* 为 $\mathbb{C}^X$ 上的可逆线性映射。（ ）

2、令 $T_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 2\lambda & 1 \end{bmatrix}$, 则 $T_\lambda T_\mu = T_{\lambda+\mu}$。（ ）

3、有限维线性空间上的线性变换为单射当且仅当其为满射。（ ）

4、每个实线性空间上的线性算子都有一维或二维不变子空间。（ ）

5、令 A 为一个复数矩阵， λ 为一个复数，则 A 对应于 λ 的 Jordan 块的个数等于空间 $Ker(\lambda I - A)$ 的维数。（ ）

6、两个同阶的实方阵 A, B 在实数域上相似当且仅当对任意复数 λ 和任意非负整数 k 都成立 $rank(A-\lambda I)^k = rank(B-\lambda I)^k$。（ ）

7、设线性空间 V 是其两个子空间 V_1 和 V_2 的直和。则 V 的任一子空间 U 是 $U \cap V_1$ 和 $U \cap V_2$ 的直和。（ ）

8、两个不同的行既约阶梯型矩阵不可能彼此行相抵。（ ）

9、每个域上行列式为 1 的方阵都是一些平延的乘积。（ ）

10、设 A 和 B 是两个 λ- 矩阵。则 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的不变因子是 A 和 B 的不变因子的计重数并集。（ ）

11、两个 2010×2011 的 λ- 矩阵等价当且仅当它们有相同的初等因子。（ ）

12、设 A 为一个可逆矩阵。则唯一存在一个置换方阵 P，一个对角阵 D，一个上三角且主对角元全为 1 的方阵 U 和一个下三角且主对角元全为 1 的方阵 L，使得 $A = PLDU$。（ ）

13、任意域上线性空间中的线性变换都可以写成两个可交换的线性变换的和，其中一个半单，另外一个幂零。（ ）

14、设 V_1 和 V_2 分别是线性变换 f 的循环子空间与不变子空间，则 $V_1 \cap V_2$ 一定是 f 的循环子空间。（ ）

15、设实数矩阵 A 和 B 的特征多项式都是 $(\lambda-3)^4(\lambda+2)$，而且 $rank(A-3I) = rank(B-3I)$，则 A 与 B 实相似。（ ）

六. 你对前面的问题的解答也许并不能充分体现你对本课程的理解和掌握。如果你希望得到可能的额外加分，你可以简明地写下任何你想说的话，包括但不限于自己编制并加以解答的若干题目，自己对某些线性代数理论的评论，使你一直琢磨不透的某些线性代数基本概念，试卷中某题目的错误或者推广与变形，对本课程的学习和教学组织的总结与批评，等等。