

交换代数考题

一、 [15 分] 证明：每个交换阿廷环只有有限多个极大理想。

二、 [15 分] 令 F 是交换环 R 上以 $(e_i)_{i=1}^n$ 为一组基的自由模。任取 $y = \sum_{i=1}^n r_i e_i, r_i \in R$, 定义 $C(y) = \sum_{i=1}^n Rr_i$. 证明： $C(y)$ 仅与 y 有关, 而与 F 中基的选取无关。

三、 [15 分] 设 Q 是交换环 R 的准素理想。证明： \sqrt{Q} 是 R 中包含 Q 的最小的素理想。

四、 [15 分] 设 K 是一个代数闭域, $R = K[x_1, \dots, x_n], J$ 是 R 的一个真理想。证明：存在 $b_1, \dots, b_n \in K$ 使得 $f(b_1, \dots, b_n) = 0, \forall f \in J$ 。

五、 [20 分] 令 R 是交换环 S 的子环。设 S 在 R 上是整的。证明： 1. 若 $r \in R$, r 是 S 中的单位, 则 r 是 R 中的单位。 2. $Jac(R) = Jac(S) \cap R$.

六、 [20 分] 设 R 为含么交换环, $P \in Spec(R), S = R \setminus P$. 证明： $S^{-1}R$ 含有唯一的极大理想。