

交换代数试题

姓名: _____ 学号: _____ 成绩: _____

- 一. (15 分) 叙述并证明希尔伯特基定理。
- 二. (20 分) 试问局部化函子和张量函子是否保正合性。如不是, 请举出反例。
- 三. (15 分) 证明: 含么环的所有幂零元的集合是该环所有素理想的交。
- 四. (20 分) 证明: 设 R 为诺特环, $I \subset R$ 为其理想。设 M 为有限生成的 R -模而 $N \subset M$ 为 R -子模, 则存在正整数 r , 使得对任意的 $n > r$ 有 $I^n M \cap N = I^{n-r}(I^r M \cap N)$ 。
- 五. (20 分) 设 R 是环 A 的子环且 A 在 R 上是整的。证明以下结论:
 - (1) 对 R 的任一素理想 p , 存在 A 的素理想 P 卧于其上, 即 $P \cap R = p$ 。
 - (2) 设 P 为 A 的素理想, $p \subset q$ 为 R 的素理想且 $P \cap R = p$ 。则存在 A 的素理想 $Q \supset P$ 使得 $Q \cap R = q$ 。
- 六. (10 分) 设 A 是非零环, Σ 是 A 的一切不含 0 的乘法封闭子集 S 的集合。证明: Σ 中有极大元, 而 $S \in \Sigma$ 是极大的当且仅当 $A \setminus S$ 是 A 的极小素理想。