零七年春数学系本科生代数表示论试题

（ 六月二十九日，开卷考试 ）

1 、 (15 分) 设有限群 G 的共轭类为 $(x_1), \ldots, (x_k)$, 且 $c_i = |(x_i)|$ 。设 G 的 k 个不可约特征标依次为 $\chi_1, \ldots, \chi_k$, 且次数分别为 $\deg \chi_i = n_i$. 我们称 $\omega_{ij} = c_i \chi_j(x_i)/n_j$, $1 \leq i, j \leq k$, 为群 G 的结构常数。证明：群 G 的结构常数都是代数整数。

2 、 (15 分) 设有限群 G 的中心为 $Z(G)$, G 中包含元素 x 的共轭类为 (x) 。定义 $Z(G)$ 在共轭类集合上的作用为 $z(x) = (zx)$ 。设 (x) 所在的 $Z(G)$ 作用下的轨道长度小于 $|Z(G)|$, 而 ρ 为群 G 的一个不可约忠实表示。证明： $\chi_\rho(x) = 0$ 。

3 、 (15 分) 设 V 为特征不为 2 的域上的有限维线性空间， $\mathcal{A}$ 为 V 上线性变换， $\Lambda^2\mathcal{A}$ 为 $\Lambda^2 V$ 上适合 $\Lambda^2\mathcal{A}(e \wedge f) = \mathcal{A}e \wedge \mathcal{A}f$ 的线性变换， $S^2\mathcal{A}$ 为 S^2V 上适合 $S^2\mathcal{A}(e \vee f) = \mathcal{A}e \vee \mathcal{A}f$ 的线性变换。证明：$tr(\Lambda^2\mathcal{A}) = \frac{(tr\mathcal{A})^2 - tr\mathcal{A}^2}{2}$, $tr(S^2\mathcal{A}) = \frac{(tr\mathcal{A})^2 + tr\mathcal{A}^2}{2}$ 。

4 、 (15 分) 设 χ 为有限群 G 的不可约复特征标。证明： χ 为实值函数当且仅当 $\sum_{g \in G} \chi(g^2) \neq 0$ 。

5 、 (10 分) 有限群 $G \neq \{1\}$ 为单群的充要条件是：对每一个不等于 1 的不可约特征标 χ 及每一个 $g \in G \setminus \{1\}$ 都有 $\chi(g) \neq \chi(1)$ 。

6 、(10 分) 令 $[n] = \{1, \ldots, n\}$. 对任意 $S, T \subseteq [n]$, 令 $\chi_S(T) = (-1)^{|S \cap T|}$, 并由此定义出 $2^{[n]}$ 上实值函数 χ_S. 对 $R^{2^{[n]}}$ 引入内积为 $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{S \subseteq [n]} f(S)g(S)$. 利用特征标知识说明 $\chi_S, S \subseteq [n]$, 为 $R^{2^{[n]}}$ 上标准正交基，并证明 $\langle f, g \rangle = \sum_{S \subseteq [n]} \langle f, \chi_S \rangle \langle \chi_S, g \rangle$ 。

7 、 (10 分) 验证下面的映射 ϕ 给出 $GL(2, \mathbf{C})$ 的一个 3 维复表示：

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad + bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$$

8 、 (10 分) 设 λ 和 μ 为 n 的两个分拆， λ 优超 μ 。证明 μ' 优超 λ' 。