06 **年秋** ACM **班初等概率论考题**

一、 (10 分) 令 X_n 为从 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中等可能地取出的一个数。记 p_n 为 X_n^2-9 被 10 整除的概率。计算 $\lim_{n\to\infty} p_n$ 。

二、 (15 分) 某城市有 85% 的出租车为白车，有 15% 的出租车为黑车。近日发生一起出租车司机夜间肇事逃逸事件。唯一的目击者举报肇事车为黑车，且测试发现该目击者可以以 80% 的概率在夜间正确区分黑车和白车。试计算该肇事车为白车的概率。

三、 (30 分) 依次独立地写下一个长为 n 的二元字符串 $a_1a_2\cdots a_n$ ，每个 a_i 取值为 1 的概率为 $\frac{1}{3}$ ，取值为 0 的概率为 $\frac{2}{3}$ 。 1) 令 X 为该随机字中连续出现两个字母依次为 0 和 1 的次数。计算 X 的期望和方差。 2) 令 Y 为该随机字中 1 出现的次数。说明 $P(Y\geq \frac{n}{2})<(\frac{2\sqrt{2}}{3})^n$.

四、 (10 分) 考虑一族事件 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 。试证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$, 则 $P(A_n\ i.o.)=0$ 。

五、 (15 分) 设有限连通电网络中 s,t 两点有外接电源，电压分布为 v, 与各点相关联的导线的电导之和表示为函数 D, 记从 s 到 t 的逃逸概率为 $P_{esc}(s\to t)$ 。试证明网络中能量耗散为 $D(s)P_{esc}(s\to t)(v(s)-v(t))^2$ 。

六、 (10 分) 证明熵函数 H 适合 $H(X,Y)=H(X)+H(Y|X)$ 。

七、(20 分) 1) 令 $X_1,\ldots,X_n$ 为 n 个独立同分布随机变量，都以 $\frac{1}{2}$ 概率取值 1 ，以 $\frac{1}{2}$ 概率取值 -1 。试证明 $P(|X_1+\cdots+X_n|\geq\lambda\sqrt{n})\leq 2\exp(-\frac{\lambda^2}{2})$ 。 2) 任给一个 n 阶 $(0,1)$ 方阵 A ，证明至少有 $\frac{(n-2)2^n}{n}$ 个 (±1) 向量 x 使得 $|Ax|_\infty<2\sqrt{n\ln n}$ 。