上海交通大学 数学学科硕士研究生课程大纲

《代数拓扑》

(Algebraic Topology)

(2005 试行稿)

一. 概况

1．开课学院（系）和学科： 理学院数学系 数学
2．课程代码：
3．课程名称：代数拓扑
4．学时/学分： 54/3
5．开课时间： 春季
6．预修课程：基础代数学
7．教材：Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002, available at: http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html

主要参考书：

a．Jean Dieudonné, A History of Algebraic and Differential Topology *1900-1960.* Birkhäuser, Boston - Basel, 1989.
b．Albrecht Dold, Lectures on Algebraic Topology, Second Edition, Springer, 1980.
c．Marvin J. Greenberg, John R. Harper, Algebraic Topology: A First Course, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1981.
d．Ioan Mackenzie James (editor), History of Topology, North-Holland, 1999.
e．Jiří Matoušek, Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Springer, 2003.
f. Tomasz Kaczynski, Konstantin Mischaikow, Marian Mrozek, Computational Homology, Springer, 2004.
g. J. Peter May, A Concise Course in Algebraic Topology, University of Chicago Press, 1999, available at: http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf
h. James R. Munkres, Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
i. Hajime Sato, Algebraic Topology: An Intuitive Approach, American Mathematical Society, 1999.
j．沈信耀， 同调论： 代数拓扑学之一， 科学出版社，2002.
k．苏竞存，流形的拓扑学， 武汉大学出版社，1992.

二. 课程简介

本课程介绍同调与上同调的基本理论．大致内容有：奇异同调；同调的计算与

应用；同调公理；上同调群，杯积；Poincaré 对偶，上同调的计算与应用。

This course is an introduction to basic homology and cohomology theory. A rough outline is as follows: Singular homology, Computations and applications of homology, Axioms for homology, Cohomology group, Cup products, Poincaré duality, Computations and applications of cohomology.

三．教学目的和要求：

本课程帮助学生了解代数拓扑从对具体对象的研究开始萌芽并在为解决更一般问题而逐步进行数学抽象的过程中最终建立起理论框架的历史进程。同调是现代数学中非常有用的工具，它帮助我们通过局部计算来获得空间和映射的整体信息。我们要求学生理解同调的概念，学会同调的基本计算方法，并看到同调如何可以在研究一些非线性的对象和映射时为我们提供大量的几何信息。我们也希望学生体会函子的威力，学会辨认不同对象的公共数学结构，认识不同数学分支的相互联系。

四．教学内容与基本要求：

1. 代数拓扑的历史，基本想法，与其它学科的联系以及若干工业应用的例子；范畴与函子等相关概念的回顾；交代本课程的基本面貌和激发学习动机 (2 学时)
2. 链复形；链映射；链同伦与链复形同调函子的回顾；奇异链与奇异同调函子；增广链复形与约化同调群函子；同调群的拓扑不变性；离散拓扑空间的同调群；零维同调群；非球状(aspherical)空间的链复形是零调(acyclic)的 (3 学时)
3. 利用棱柱算子证明同伦映射诱导出链同伦的链映射；(相对) 同调函子是同伦范畴上的函子；切除定理的两种形式的表述及其等价性(3 学时)
4. 重心重分；嵌入映射诱导出从一个空间的开覆盖的链复形到其本身的链复形的链同伦等价；切除定理的证明；零调承载子 (3 学时)
5. 拓扑空间三元组的复形短正合列；蛇形引理的回顾；相对同调群长正合列；约化同调群的几种等价定义的讨论；若 A 形变收缩到 B 则计算相对同调时可互相替换；好拓扑空间对(good pair)的绝对同调群长正合列；楔和的同调群；球面的同调群；Brouwer 不动点定理；局部同调群；(带边) 流形的维数不变和边缘不变定理(3 学时)
6. 球及其边界球面的相对同调群和球面的约化同调群的生成元的确定；Delta 复形与 Delta 集合的对应关系；Delta 集合的单纯链复形；Delta 复形的单纯同调及其与奇异同调的等价；单纯同调与组合结构；具有有限个 n 维胞腔的 Delta 复形的同调群是有限生成的；Betti 数与挠系数；将一个空间的奇异同调看成是另一个空间的单纯同调(3 学时)
7. 球面映射的映射度；Borsuk-Ulam 定理 (第一个证明)；球面连续切向量场；球面上自由作用；利用局部映射度计算映射度；给定映射度的球面映射和给定局部映射度的球面映射的实现 (3 学时)
8. CW 复形，正则(regular) CW 复形，单纯复形及 Delta 复形的相互关

系；球面的最简单的胞腔分解；归纳法给出的实射影平面，复射影平面和透镜空间的胞腔分解；球面作为射影空间和透镜空间的覆盖空间及使覆盖投射（Hopf 映射）为胞腔映射的相应胞腔分解；胞腔同调的定义(3 学时)

9. 胞腔同调与奇异同调的等价；通过映射度计算胞腔同调；相邻两个维数上不全都有胞腔的 CW 复形的同调群；只有有限个 n 维胞腔的空间的 n 维同调群；通过胞腔同调计算定向和不可定向闭曲面，射影空间和透镜空间以及 Moore 空间的同调群；分裂短正合列，一个空间及其收缩核的同调群及应用(3 学时)
10. 同调的 Mayer-Vietoris 序列和相对 Mayer-Vietoris 序列；利用 Mayer-Vietoris 序列再次计算球面和 Klein 瓶的同调群； Euler 示性数；单纯逼近定理，Lefschetz 不动点定理及其在算法复杂性研究的应用 (3 学时)
11. 上同调群的直观认识：1 维与 2 维 Delta 复形的上同调；作为奇异同调对偶的奇异上同调； 外微分形式的上同调； De Rham 定理的叙述；同调与上同调的 Pontrjagin 对偶性；利用线性代数说明每个自由 Abel 群的链复形可以分解成简单链复形的直和，从而在特殊情况下看出上同调被同调所决定（即特殊情况下的万有系数定理） (2 学时)
12. 自由函子与零调模方法； 张量积复形;利用零调模方法证明 Eilenberg－Zilber 定理，从而说明`抽象废话’的威力; 简单复习同调代数若干基本概念，左(右)正合函子，左(右)导出函子：Hom 函子，Ext 函子，张量积函子，挠积函子（仅介绍在同调代数中推导出的基本计算公式，从而对两个有限生成 Abel 群可以计算出这四种乘积）；一般系数同调与上同调；介绍链复形的 Künneth 公式和对偶 Künneth 公式以及同调与上同调的四种形式的万有系数定理（但不予证明）；利用链复形的 Künneth 公式证明同调的万有系数定理；利用 Eilenberg－Zilber 定理和链复形的 Künneth 公式来证明乘积空间的 Künneth 公式 (4 学时)
13. 同调公理与上同调公理；利用模 2 同调证明每一个球面奇（偶）映射的映射度为奇（偶）数，再次证明 Borsuk-Ulam 定理 (1 学时)
14. 杯积与外杯积；系数为交换环时杯积具有 Grassman 性质；上同调环；上同调环的同伦不变性；n-环面的上同调环；实射影空间的模 2 上同调环（第一个证明）； 2 维球面与 4 维球面的楔和与复射影平面有相同的上同调群和不同的上同调环(4 学时)
15. Poincaré 对偶定理的通俗描述；对偶胞腔结构(dual cell structure)与 Poincaré 对偶定理的几何理解；流形的局部与整体定向；流形的基本类(fundamental class) (3 学时)
16. 帽积；闭流形的 Poincaré 对偶定理的严格陈述；以闭可定向曲面为例来理解 Poincaré 对偶定理(2 学时)
17. 杯积与帽积的关系； Poincaré 对偶与流形的杯积结构； 利用 Poincaré 对偶定理再次计算实射影空间的模 2 上同调环； 低维射影空间不是高维射影空间的收缩核；Hopf 映射非零伦；不存在从高维球面到低维球面的奇映射； Hopf 不变量 (3 学时)
18. 1 维同调群为 0 的可定向 3 维流形是同调球；奇数维的可定向闭流形

的欧拉示性数为零；利用上同调与基本群第三次证明 Borsuk-Ulam 定理(1 学时)

19.H 空间与 Hopf 代数简介(2 学时)

五．其他需要说明的问题

按实际授课时间为 17 周，每周 3 学时计算，总共列出 51 学时的教学计划；若学生程度好，进度快，可以给出对闭流形的 Poincaré 对偶定理的完整证明，甚至一般的 Poincaré 对偶定理的证明；课程中同调代数部分大都述而不证，是由于它们分别被《基础代数学》与《交换代数与同调代数》这两门课程所覆盖。

起草者：吴耀琨
审阅者：×××
起草时间：2005/5/1
批准：