零三年秋数学系硕士研究生拓扑学试题

（ 考试时间地点：二零零四年一月十二日下午闵行数学楼 ）

a 、（ 10 分）设 σ 与 τ 为单连通空间 X 中两条有相同起点及相同终点的道路，试说明它们在 X 中定端同伦。

b 、（ 15 分）

(I) 试举例说明存在单射 $f:\ X \to Y$ 使得 $f_*:\ \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 不是单射；

(II) 设 X 是 Y 的收缩核， $i:\ X \to Y$ 为嵌入映射，试说明 $i_*:\ \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ 为单射；

(III) 令 Y 为由全体 2 阶酉阵组成的 $\mathcal{C}^4$ 的子空间，试说明 Y 道路连通且 $\pi_1(Y)$ 不是有限群。（提示：设法将单位圆周看作 Y 的收缩核）

c 、（ 15 分）证明：

(I) 射影平面 P^2 的基本群为 Z_2 ；

(II) 任意两个从 P^2 到直线 R 的映射彼此同伦；

(III) 任一从 P^2 到单位圆周 S^1 的连续映射必零伦。（提示：说明所论映射可以提升为从 P^2 到 R 的映射）

d 、（ 10 分）试验证两个链复形之间的链映射的链同伦关系是一个等价关系。

e 、（ 10 分）对任意非负整数 p ，设 h_p 为从拓扑空间对与连续映射的范畴到交换群与群同态的范畴的一个函子。假设 $h_* = \sum_{p=0}^{\infty} h_p$ 满足正合公理，即对任给拓扑空间对 (X, A) 及相应嵌入映射 $i:\ A \to X$ 和 $j:\ X = (X, \emptyset) \to (X, A)$ 都存在连接同态 $\partial_p,\ p \in \mathcal{N}$ ，使得下述序列为正合序列：

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+2}} h_{p+1}(A) \xrightarrow{h_{p+1}(i)} h_{p+1}(X) \xrightarrow{h_{p+1}(j)} h_{p+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{p+1}} h_p(A) \xrightarrow{h_p(i)} h_p(X) \xrightarrow{h_p(j)} \cdots \xrightarrow{h_0(j)} h_0(X, A) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

试证明恒成立 $h_p(X,X)=0$ 。

f 、（ 10 分）利用 Mayer-Vietoris 序列计算 $S^5 \vee S^4$ 的同调群。

g 、（ 10 分） 试说明 S^3 不是 S^4 的收缩核。（提示：考虑一个空间的同调群与其收缩核的同调群的关系）

h 、（ 10 分）

(I) 请利用旋转度理论说明 S^2 上任一连续自映射或者有不动点或者把一点映到其对径点；

(II) 利用提升定理及前一小题说明： P^2 上任一连续自映射都有不动点。

i 、（ 10 分）

(I) 计算 P^2 的同调群；

(II) 利用 Lefschetz 不动点定理再次说明 P^2 上任一连续自映射都有不动点。