组合学期末作业 *

对正整数 n, 底下总是以 $[n]$ 记集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ ，以 S_n 表示 n 个文字上的全对称群，以 $Aut(G)$ 表示图 G 的自同构群，以 C_n 表示长 n 的圈图，即 $V(C_n) = Z_n, E(C_n) = \{i(i+1) : i \in Z_n\}$ 。

A 、设 T 为顶点集合 $[5]$ 上的一棵树， $d(i, j)$ 表示 T 上点 i 与点 j 之间距离。 T 的距离矩阵 $D(T)$ 是以 $d(i, j)$ 为 (i, j) 元的一个 5 阶方阵。试证明：对称阵 $D(T)$ 的正，负惯性指数分别为 1 和 4 。（ 我们在课堂上讨论相关内容时未加证明地使用了一个引理，但如果你也想用它，请附上完整证明。）

B 、令 H 为一个 6×32 阶 $(0, 1)$ 矩阵，其列向量互异且都含偶数个 1 。对 $H_i = \{j : H(i, j) = 1\}$ 引入等价关系 $\sim_i$ 如下：如果 $j, j+1 \in H_i$, 则

*评分的唯一目的是对你们的作业主观地进行分级，并生成学校希望看到的正态分布。评分时首先考虑的因素是你的工作态度；其次是独创性，语言表达能力，逻辑严密程度。你可以使用任何手段来完成作业，包括讨论，查笔记，翻书， google ，编程，甚至你可以请资深教授来替你做－－如果你请得到，我也认为这体现一种能力。如果全体同学都用同种方法漂亮地解决了某一问题，那么此题用来区分你们所交作业优秀程度的作用将趋于零。如果只有你尝试了某题，即使方法很笨拙，结果不理想，你也可能借此领先很多其它同学。我工作很忙，又没有慧眼，还同你们一样要为回家过年作准备，所以如果你的字迹太潦草，如果你的论证太不清晰，超出我的理解程度，相关部分将迅速判入最低等级。我希望你们通过适当的工作量来挣这个学分，而不是通过威胁或利诱来赚取这个学分。如果你们有更重要的事情要去做，放弃这个学分是一种明智的选择－－ Einstein 考试不及格只是在成就创立相对论的伟业后为他在老百姓心目中徒增光彩，反之， Einstein 创立了相对论也并不证明当年他的老师 Minkowski 就应该给他一个更好的分数。请需要学分的同学在 04 年 1 月 9 日早上 11 点之前提交作业。

$j \sim_i j+1$ 。记 $h(i)$ 为等价关系 $\sim_i$ 下的等价类数目。请估计 $\max\{h(i): i \in [6]\}$ 的取值范围 (特别有兴趣的是下界估计) 。

C 、设 f, g 为两个从集合 $\mathcal{E}$ 到集合 $\mathcal{F}$ 的映射，适合：

(I) $\forall x \in \mathcal{E},\ f(x) \neq g(x)$;

(II) $\forall y \in \mathcal{F},\ \min\{Card\ (f^{-1}(y)), Card\ (g^{-1}(y))\} \leq 2$ 。

试证明：存在 $\mathcal{E}$ 的划分 $\mathcal{E} = \cup_{i=1}^{5} \mathcal{E}_i$, 使得 $f(\mathcal{E}_i) \cap g(\mathcal{E}_i) = \emptyset, \forall\ i \in [5]$.

D 、设 $\mathcal{P} = (P, \leq)$ 为一个偏序集。 $A \subseteq P$ 被称为 $\mathcal{P}$ 的一个序理想，如果 $a \in A, b \leq a$, 蕴涵 $b \in A$ 。以 $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ 记 $\mathcal{P}$ 的所有序理想组成的集合。设 $f:\ P \to \mathcal{I}(\mathcal{P})$ 为一个保序映射，即 $a \leq b$ 蕴涵 $f(a) \subseteq f(b)$ 。试说明 f 不是满射。（ 提示：回忆一下一年前的实变课上向你们介绍的那位理发师。）

E 、图 G 在 R^n 中的一个正交表示是从 $V(G)$ 到 R^n 中以原点为心的单位球面的一个映射 f ，且适合 $uv \notin E(G)$ 蕴涵 $f(u)$ 与 $f(v)$ 正交。给定图 $G = (V, E)$, 我们定义图 G^k 如下： $V(G^k) = \{(v_1, \cdots, v_k):\ v_i \in V\}$ ， $E(G^k) = \{(v_1, \cdots, v_k)(u_1, \cdots, u_k):\ v_i u_i \in E(G)\}$ 。 G 中两两之间无边相联的一个顶点子集被称为独立点集。以 $\alpha(G)$ 表示图 G 中最大的独立点集的规模。

(I) 试给出 C_5 在 R^3 中的一个正交表示，

(II) 试构造 C_5^k 在 R^{3^k} 中的一个正交表示。

(III) 试估计 C_5 的 Shannon 容量，即 $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\alpha(C_5^k)}$ 。(提示： f 为 G 在 R^n 中正交表示， A 为 G 中独立点集，则有 $\forall\ v \in R^n, \sum_{w\in A}(v \cdot f(w))^2 \leq v \cdot v$.)

F 、设 $v_1, v_2, \cdots, v_t$ 为 R^5 中 t 个互异单位向量，且其中任两个 (不同) 向量的内积取值都来自某二元集合 $\{\alpha, \beta\}$ 。试给出 t 的上界估计。

G 、设 $\mathcal{B}$ 为一个赋范线性空间， W_1, W_2, W_3 是 $\mathcal{B}$ 中三个直径小于 1 的子集， $v_1, \cdots, v_5$ 是 $\mathcal{B}$ 中五个范数大于 1 的元素。对 $\forall A \subseteq [5]$ 我们定义

$\omega_A=\sum_{i\in A}v_i$ (注意： $\omega_\emptyset=0$) 。试证明：至多存在 25 个不同的集合 A 满足 ω_A 落入 $\cup_{i=1}^3 W_i$ 。

H 、超图中的一条途径是一个顶点与超边的交错序列，且相邻的顶点与超边有包含关系。设超图 $H=(V,E)$ 有 c 个连通分支。试证明： $|V|-\sum_{\substack{e\in E\\ e\neq\emptyset}}(|e|-1)\le c$ ；等号成立当且仅当对任意 $v\in V, f\in V\cup E$ 都成立连接 f 与 v 的最短途径至多有一条（ 即 H 为无圈超图 ）。

I 、设超图 H 中任两顶点之间，任一顶点与任一超边间，都有唯一的最短途径相连。试说明： H 的任意两条超边之间也有唯一的最短途径相连。

J 、对给定图 G 的边集 $E(G)$ 的一个划分 $\pi=(E_1,\cdots,E_k)$ (即 $\bigcup_{i=1}^k E_i=E(G), E_i\cap E_j=\emptyset, i\neq j.$) ，我们用 $d_\pi(e,i)$ 表示边 e 与 E_i 中的边的最短距离，并令 $\varphi_\pi(e)=(d_\pi(e,1),\cdots,d_\pi(e,k))$ 。试分别对 G 为 6 阶完全图和 7 阶完全图的情形估计使得 φ_π 为单射的 k 的下界。

K 、对正整数 k 我们定义奇图 O_k 如下： $V(O_k)=\binom{[2k+1]}{k}, E(O_k)=\{AB: A\cap B=\emptyset, A,B\in\binom{[2k+1]}{k}\}$ 。试证明： $Aut(O_k)=S_{2k+1}$ 。（ 提示：可以考虑使用 Erdős-Ko-Rado 定理。）

L 、以 $\mathcal{S}_n$ 记各分量之和为 1 的非负 n 维列向量的集合。令 A 为任一 $m\times n$ 实矩阵。试利用线性规划对偶定理证明 Von Neumann 极小极大定理： $\max_{x\in\mathcal{S}_m}\min_{y\in\mathcal{S}_n}x^TAy=\min_{y\in\mathcal{S}_n}\max_{x\in\mathcal{S}_m}x^TAy$ 。

M 、对任一方阵 $S=(s_{ij})$ ，我们定义 $c_j(S)=\sum_{i=1}^n s_{ij}, r_i(S)=\sum_{j=1}^n s_{ij}$ 。设 $P=(p_{ij})$ 为 5 阶实方阵，且有 $\sum_{j=1}^5 c_j(P)=C$ 为整数。请说明：存在一个 5 阶整数方阵 $Q=(q_{ij})$, 适合 $p_{ij}+1>q_{ij}>p_{ij}-1, r_i(P)+1>r_i(Q)>r_i(P)-1, c_j(P)+1>c_j(Q)>c_j(P)-1, \forall\, i,j\in[5]$ ，且 $\sum_{j=1}^5 c_j(Q)=C$ 。

N 、令 Z_5 为 5 阶循环群。设 $f_0:\ Z_5\to Z_5$ ，适合 $f_0(i)=i+1, \forall i\in Z_5$ 。设 $f_1:\ Z_5\to Z_5$ 为任一映射。一个长 n 的字 $i_1i_2\cdots i_n, i_j\in\{0,1\}, j=1,2,\cdots n,$ 被称为 f_1- 好字，如果有 $|f_{i_1}\circ f_{i_2}\circ\cdots\circ f_{i_n}(Z_5)|=1$ ，即 $f_{i_1}\circ f_{i_2}\circ\cdots\circ f_{i_n}$ 把 Z_5 映为一个点。记最短的 f_1- 好字的长度为 $L(f_1)$ 。记 $L=\max\{L(f_1):\ f_1$

非满射 $\}$ 。请证明 $L=16$ ，或给出 L 的估计，或说明 L 存在。

O 、设 G 为一个以 $[55]$ 为顶点集的有向图，且对 $\forall\, i,j\in[55]$ ， G 中都恰有 56 条长度为 1 或 2 的途径连接顶点 i 与顶点 j 。试证明： $E(G)=\{ij:\ i,j\in[55]\}$ (每条弧 ij 在 $E(G)$ 中出现重数为 1) 。