02 **秋数学系本科四年级拓扑试题**

[满分以一百分计]

第一部分（每题 15 分，满分 45 分）

1A 、设 S 为拓扑空间 X 的子集。请说明下述命题彼此等价：

(I) 对任意非空集合 A, B, 若 $A \cup B = S$, 则 $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset$;

(II) 不存在 X 中与 S 有非空交的闭集 A', B', 适合 $A' \cap B' \cap S = \emptyset$, 且 $A' \cup B' \supseteq S$ 。

1B 、对下面两个论断判断真伪，并相应给出证明或反例：

(I) 设 A 为拓扑空间 X 中连通集，而 $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, 则 B 连通；

(II) 设 A 为拓扑空间 X 中连通集，则 A 的内部连通。

1C 、设 $f, g : X \to Y$, 为两个连续映射。求证：如果 Y 为 Hausdorff 空间，则 $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ 为 X 中闭集。

1D 、设 $f : X \to Y$, 为映射， $Gr(f) = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$. 试说明：

(I) 依 $g(x) = (x, f(x))$ 定义映射 $g : X \to X \times Y$, 则 g 连续当且仅当 f 连续；

(II) 若 f 连续， X 道路连通，则 $Gr(f)$ 是 $X \times Y$ 中道路连通子集；

(III) 若 f 连续， Y 为 Hausdorff 空间，则 $Gr(f)$ 为闭集。

1E 、设 X 为一个紧致拓扑空间，而

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$$

为其中一列非空闭集。求证： $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$ 。

1F 、设单位圆周被两个闭集 A 和 B 覆盖。求证： A 和 B 中至少有一个覆盖了圆周的一组对径点。(利用类似于 Sperner 引理的 Tucker 引

理可以给出这一简单命题的高维推广，即代数拓扑中所谓的 Lusternik-Schnirelmann 定理。又，条件可以减弱为 A 和 B 中有一个是闭集。)

第二部分（每题 15 分，满分 60 分）

2A 、利用 Euler 公式说明 5 阶完全图不是平面图。

2B 、利用切线回转定理证明：任一二维自治微分方程的闭积分曲线所包围的有界区域中都含有方程的奇点。

2C 、确定曲面 $< a,b,c,d,e \mid abcdea^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}e^{-1} >$ 的标准型。（你可以执行通过初等变换化归曲面标准型的算法，或者利用可定向性与 Euler 示性数是曲面拓扑分类的一组全系不变量。)

2D 、设 V 为圆周 $\gamma = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2=1\}$ 上处处非零的连续向量场，且对 γ 上任一点 (x,y) 都成立 $V(x,y) = -V(-x,-y)$ 。求证：

(I) V 在 γ 上的旋转数为奇数；

(II) V 不能连续延拓为 $\{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ 上的处处非零连续向量场。

第三部分（每题 15 分，满分 45 分）

3A 、设 X 为紧致拓扑空间，而 $f: X \to X$ 为一个同胚映射。利用 Zorn 引理说明：存在 $z \in X$, 满足 z 是 $\{f^n(z)\}_{n\in N}$ 的一个极限点。

3B 、设 X 是一个局部紧致 Hausdorff 拓扑空间，而对任意自然数 i, 有 X 中非空开集 U_i 适合 $\overline{U_i} = X$ 。求证： $\overline{\cap_{i=1}^{\infty} U_i} = X$ 。

3C 、设 $I_1, I_2, \cdots,$ 是实数轴上一列两两不交闭区间，且它们的并集覆盖闭区间 I 。试证明：存在 $i, I \subseteq I_i$ 。

3D 、设 X 为一个拓扑空间, 而 $T: X \to X$ 为一个拓扑可迁的连续映射, 即任给两个非空开集 $U, V \subseteq X$, 都存在非负整数 n, 使得 $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ 。试说明： X 中任意一个基数有限的非空开集均含 T 的周期点。

3E、设 $X \neq \emptyset$ 是一个第二可数局部紧致 Hausdorff 拓扑空间。令 $T : X \to X$ 为任一连续映射。请说明下述命题彼此等价：

(I) T 拓扑可迁；

(II) 存在 $x \in X$, 其向前轨道 $O(x) = \{T^n(x) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 以 X 中所有点为极限点。

(你可以利用 3D 的结论。)

3F 、一个度量空间 (X, d) 称为是完全有界的，如果对 X 中任一点列 $\{x_i\}_{i\in N}$ 及任何 $\epsilon > 0$, 都存在 $i < j$, 使得 $d(x_i, x_j) < \epsilon$ 。试证明：完全有界度量空间中的任一点列都包含一个 Cauchy 子列。

3G 、证明：实平面不能被两两不相交的非退化圆周（即，不退化为点或直线）所覆盖。

3H 、证明：实平面不能被可数多条直线所覆盖。

第四部分（每题 15 分，满分 60 分）

4A 、设 V 为单位闭圆盘 $\{z \in C \ : | \ z \ |\leq 1\}$ 上的连续向量场。记原点为 O. 设对模长为 1 的任一点 Z, 都有 $V(Z)$ 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的内积不大于 0 。试说明向量场 V 存在奇点。(你可以利用 Brouwer 不动点定理或利用旋转数基本定理。)

4B 、设 f 为一个复平面 C 上连续自映射，且对每个模长为 1 的复数 z 都有 $\frac{f(z)-z}{z}$ 的幅角落入区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 。请证明：单位闭圆盘 $B = \{z \in C \ : | \ z \ |\leq 1\}$ 内包含 f 的不动点，且有 $f(B) \supseteq B$ 。

4C 、令 $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1, x_3 \geq 0\}$ 。设 V 为 $\mathcal{S}$ 上的连续切向量场，且对 $\mathcal{S}$ 边界上任一点 $(x_1, x_2, 0)$ 均成立 $V(x_1, x_2, 0) = V(-x_1, -x_2, 0)$ 。请通过对球面或射影平面上相应切向量场利用 Poincare 指标定理来说明向量场 V 存在奇点。(这本质上与 2D 说的是一回事。它们意味着，你得设计好发型的边界条件，才可以使你的头发既处处平滑地趴下，又处处”出头”。)

4D 、证明或否定：射影平面上任一连续自映射都有不动点。

第五部分（每题 15 分，满分 90 分）

5A 、以 $c_1(M)$ 记曲面 M 的所有胞腔剖分中最少可能的边数，而以 $t_0(M)$ 表示 M 的所有三角剖分中最少可能的顶点数. 试证明：$c_1(S^2)=0, c_1(T^2)=2, t_0(T^2)=7$ 。

5B 、利用 Alexander 引理证明：对任一从单位闭圆盘 B 到 R^2 的连续单射 f 都成立 $R^2-f(B)$ 道路连通。

5C 、利用 Jordan 曲线定理及 5B 证明：若 f 是从单位闭圆盘 B 到 R^2 的连续单射， S^1 是 B 的边界圆周，则 $f(B)$ 与 B 同胚，且有 $f(B-S^1)$ 是 $R^2-f(S^1)$ 的一个有界连通分支。

5D 、设 U 为 R^2 中开集， $f:U\to R^2$, 为连续单射. 试利用 5C 说明：$f(U)$ 亦为 R^2 中开集，且 $f(U)$ 与 U 同胚。

5E 、令 G_1 与 G_2 为 R^2 中开集, 而 $F_1=R^2-G_1$,$F_2=R^2-G_2$ 。设 P,Q 为 R^2 中两点，λ_1 与 λ_2 分别为 G_1 与 G_2 中的 1- 链，适合 $\partial(\lambda_1)=\partial(\lambda_2)=P+Q$, $\lambda_1\sim\lambda_2$ (in $G_1\cup G_2$) 。对下面两个论断判别真伪，并相应给出证明或反例：

(I) $P\sim Q$ (in $G_1\cap G_2$);

(II) 如果 F_1 有界，则 $P\sim Q$ (in $G_1\cap G_2$) 。

5F 、计算有 5 个洞的平面的 1 维模 2 同调群以及 $T^2\sharp T^2\sharp T^2$ 的 1 维整数同调群。

5G 、试说明曲面上梯度向量场任一奇点邻域内不含椭圆扇形。

5H 、令 $\mathcal{K}$ 为球面的一个胞腔剖分所成复形。我们说 $\mathcal{K}$ 可以 2- 面染色，如果 $\mathcal{K}$ 的面可以分成两组， X 和 Y, 使得对 $\mathcal{K}$ 中每条边 e, 都既有 X 中的面包含 e, 也有 Y 中的面包含 e 。证明： $\mathcal{K}$ 可以 2- 面染色当且仅当 $\mathcal{K}$ 的每个顶点都是 $\mathcal{K}$ 中偶数条边的端点。 (你可以考虑模 2 链群并利

用 K 上 1 维闭链群等同于 1 维边缘链群的事实。如果考虑一般的模 k 同调群，就可以得到 Tutte 的一个经典结果：平面图存在 k- 面染色等价于其上有处处非零 k- 流。)