2002 年上海交大数学第二学位高等代数试题

一、（ 10 分）设 J_5 为 5 阶全 1 方阵， I_5 为 5 阶单位阵。试确定：

1. 所有使 $\lambda I_5 - J_5$ 不可逆的实数 λ；
2. $55I_5 - J_5$ 的逆矩阵。

二、（ 15 分）设复矩阵 A 的不变因子为 $(\lambda^2-1)(\lambda^2-2\lambda-3)$， $(\lambda-1)$，1， 1， 1 。试求：

1. A 的初等因子组；
2. A 与 A^{10} 的 Jordan 标准形。

三、（ 10 分）假设成立矩阵方程 $AX - YB = C$ 。求证：

$$rank\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}.$$

四、（ 10 分）设同阶复方阵 A, B 适合 $A^2 = A, B^2 = B$, $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$ 。试证明： A 与 B 相似。

五、（ 15 分）设 M 为 n 阶实正定阵， x 为任一 n 维实列向量。试证：

1. M 与 $M + xx^T$ 均为可逆阵；
2. M^{-1} 正定；
3. $x^T(xx^T+M)^{-1}x < 1$ 。

六、（ 10 分）利用 **Binet-Cauchy** 公式证明：

对任意实数 $u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n$，有 $(\sum_{i=1}^n u_i^2)(\sum_{i=1}^n v_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n u_i v_i)^2$，且等号成立当且仅当行向量 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 与 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 线性相关。

七、（ 15 分）设 A 为 n 阶实对称方阵，且对任意 n 维行向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 有 $xAx^T = \sum_{i=1}^{t} u_i(x)v_i(x)$ ，这儿 $u_i(x)$, $v_i(x)$, $i = 1, \cdots, t$, 均为关于 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实线性函数。试证：

1. 存在关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实线性函数 $L_1, \cdots, L_t, R_1, \cdots, R_t$ 使得 $xAx^T = L_1^2 + \cdots + L_t^2 - R_1^2 - \cdots - R_t^2$ ；

2. 设 A 的正，负惯性指数分别为 p, q ，则 $max(p, q) \leq t$ 。（提示：存在 $n-t$ 维子空间 V_1 ，使 $\forall x \in V_1$ ，有 $xAx^T \leq 0$ ；存在 p 维子空间 V_2 ，使 $\forall x \in V_2$ ， $x \neq 0$ ，有 $xAx^T > 0$; $\cdots$ ）

八、（ 15 分）仍记 J_n 为 n 阶全 1 方阵， I_n 为 n 阶单位阵。

1. 试求 $J_n - I_n$ 的正、负惯性指数;

2. 令 $V = \{1, 2, \cdots, n\}$, $E = \{(i, j) | i \neq j,\ i, j \in V\}$ 。对 $S, T \subseteq V$ ，记 $A(S, T) = \{(i, j), (j, i) | i \in S, j \in T\}$ 。设有 V 的子集 $S_1, S_2, \cdots, S_t, T_1, T_2, \cdots, T_t$, 使 $E = \bigcup_{i=1}^{t} A(S_i, T_i)$, 且 $A(S_i, T_i), i = 1, \cdots, t,$ 两两不交。证明： $t \geq n-1$ 。（提示：利用第七题结论及八 (1) ）

注：出于设计通讯网络中高效路由算法的一种考虑，Bell. Lab. 的科学家提出并解决了八 (2) 。