高校应用数学学报A辑 Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A
2006,21(2):238-244

探针区间图和STS-探针区间图的刻划

孔 静[1],吴耀琨[1,2]

(1. 上海交通大学 数学系,上海 200240;
2. 大连理工大学 高科技研究院,辽宁大连 116024)

摘 要:该文首先引入了探针区间序来刻划探针区间图;接着给出STS-探针区间图的探针区间完备的一种构造方法,并借此得到二部图G是相对于给定顶点划分的STS-探针区间图的一个充要条件;同时也说明了STS-探针区间图其实就是其他文献中被独立研究的凸二部图.最后基于前面给出的STS-探针区间图的刻划结果提供了两种简单的$O(|V|+|E|)$时间的STS-探针区间图的判别算法.

关键词:区间图;探针区间图;STS-探针区间图;凸二部图

中图分类号:O157.5

文献标识码:A **文章编号**:1000-4424(2006)02-0238-07

§1 引 言

绘制物理图谱(physical mapping),也称物理作图,在分子生物学和基因工程的研究中有着重要作用.为了测定规模巨大的DNA结构,人们首先将目标DNA进行多次复制,然后通过限制酶对每一个复制得到的DNA进行近似随机的切割,产生很多较小的DNA片段.接下来再将每一个小的DNA片段作为克隆(clone)通过载体进行复制,从而得到由成千上万个克隆组成的"克隆文库".现有的各种技术,如"指纹分析"法(fingerprint)[1],可以帮助判断两个克隆是否来自目标DNA上相互重叠的位置.物理作图就是利用克隆文库中的克隆的相互重叠信息,来确定这些克隆在目标DNA上的相对位置.显然,为了能恢复出克隆在目标DNA上的相对位置,克隆文库需要提供足够多的重叠信息.通过物理作图,人们只要去精确测定每一个克隆的结构,就可以得到目标DNA的可能结构.

如果一个图$G=(V,E)$的每个顶点v都对应着一个实数轴上的区间I_v(这里开区间或闭区间皆可),使得$uv\in E(G)$当且仅当$I_u\cap I_v\neq\emptyset$,那么称$I=\{I_v: v\in V(G)\}$为G的一个区间表示,并且称G为区间图(interval graph)[2].对于给定的区间图,由PQ-树算法[3]或者改进的PQ-树算法[4]可以在线性时间内找到它的所有区间表示.于是,如果有足够大的克隆

收稿日期:2003-09-30

基金项目:国家自然科学基金(10301021)

文库，且获得了所有的重叠信息，可以借助于区间图模型来绘制出所有可能的物理图谱[5]. 但是在实际操作中，要得到克隆的全部重叠信息是极为耗时和耗资的，因此理想的途径是能够只利用部分的重叠信息来进行物理作图. 文献[6,7]提出可以通过“杂交”(hybridization)来得到克隆的重叠信息. 所谓杂交法是指选定一部分克隆进行标记，并以这些标记的克隆作为探针(probe)，再通过基因杂交得到探针与其它克隆之间的重叠信息. 既然那些非探针的克隆间的重叠信息是未知的，区间图模型此时已不再适用，于是人们提出了探针区间图(probe interval graph)[7]的概念. 进一步，如果适当选取作为探针的克隆，使其在目标DNA上的位置互不重叠，那么相应的物理作图问题在很大程度上就转化为对STS(sequence tagged site)-探针区间图的研究[8].

现在来介绍探针区间图与STS-探针区间图的定义. 设(P,N)是图$G=(V,E)$的一个顶点划分，即$P,N\subseteq V(G)$，$P\cap N=\varnothing$，$P\cup N=V(G)$. 如果图G的每个顶点v都对应着一个区间I_v，使得$uv\in E(G)$当且仅当$I_u\cap I_v\neq\varnothing$且$\{u,v\}\cap P\neq\varnothing$，那么称$I=\{I_v: v\in V(G)\}$是$G$的一个相对于$(P,N)$的探针区间表示，并且称$G$是相对于$(P,N)$的探针区间图，记为$G=(P,N,E)$. 如果一个探针区间图$G=(P,N,E)$以$P$为独立集，则称之为一个STS-探针区间图. 若$I$是探针区间图$G$的一个探针区间表示，那么以$I$为区间表示的区间图被称为$G$相对于$I$的探针区间完备. 由于$G$可以有不同的探针区间表示，所以一般来说$G$会有不同构的探针区间完备. 如果在物理作图中作为探针的克隆对应着P中的点，而非探针的克隆对应着N中的点，物理作图就可以抽象为构造(STS-)探针区间图的探针区间表示和寻找相应的的探针区间完备的问题. 如上可见，为了更有效地进行物理作图，也为了在物理作图前可以检测实验数据的可靠性，需要了解区间图和(STS-)探针区间图等图类更多的结构性质，需要对其刻划与识别问题进行研究.

McMorris，Wang 和 Zhang[9]证明了任意的探针区间图都是完美图(perfect graph)，并通过内蕴团(intrinsic clique)的可继承性对探针区间图进行了刻划. Sheng[10]描述了无圈的探针区间图的性质. 给定图G的一个顶点划分，Johnsons 和 Spinrad[11]及 McConnell 和 Spinrad[12]分别给出了时间复杂度为$O(|V|^2)$和$O(|V|+|E|\log|V|)$的探针区间图的判别算法；他们的算法的设计与分析都相当复杂. 作为对探针区间图的推广，[13]和[14]分别引入了标记探针区间图(tagged probe interval graph)和单位探针区间图(unit probe interval graph)的概念，并讨论了相关性质. 而[15-17]讨论了实验误差的影响，研究了如何将二部图的顶点间的邻接关系进行调整，从而使其变成出现概率最大的STS-探针区间图.

在第二节引入了顶点集合的一种线性排序，即所谓的探针区间序，由此对探针区间图进行了刻划. 在第三节中对任意的图G及给定的顶点划分(P,N)，定义了一个新图$G_{P,N}$. 说明当G为STS-探针区间图时，$G_{P,N}$是它的一个探针区间完备. 进一步证明了图G是相对于(P,N)的STS-探针区间图当且仅当G是二分类为(P,N)的二部图且$G_{P,N}$是区间图. 另外，也发现STS-探针区间图就是其他文献中被独立研究的凸二部图. 最后，基于第三节的刻划结果，在第四节中给出了两个简单的$O(|V|+|E|)$时间的STS-探针区间图的判别算法.

§2　探针区间序与探针区间图

对于给定的图$G=(V,E)$，我们总是记$n=|V(G)|$，$m=|E(G)|$，并且记G中任一顶点

v 的开邻域为 $N(v)=\{u\in V(G): uv\in E(G)\}$，闭邻域为 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$. G 的一个顶点排序 $\sigma=[v_1,\cdots,v_n]$ 被称为区间序，如果 σ 满足：

$$\text{若 } i<l<j, v_iv_j\in E(G), \text{则 } v_lv_j\in E(G). \tag{1}$$

定理 1[18] 图 G 为区间图当且仅当 G 有一个区间序.

受到定理 1 的启发，我们将引入一个类似于区间序的概念，并借此给出探针区间图的一种刻划.

对于图 G 和它的一个顶点划分 (P,N)，G 的一个顶点排序 $\sigma=[v_1,\cdots,v_n]$ 被称为相对于 (P,N) 的探针区间序，如果 σ 满足：

$$\text{若 } i<l<j, v_iv_j\in E(G) \text{ 且 } \{v_l,v_j\}\cap P\neq\emptyset, \text{则 } v_lv_j\in E(G). \tag{2}$$

定理 2 设 N 为图 G 中的独立集. 图 G 是相对于顶点划分 (P,N) 的探针区间图当且仅当 G 有一个相对于 (P,N) 的探针区间序.

证 如果 G 是相对于 (P,N) 的探针区间图，设 G 的一个探针区间完备为 G^*，那么 G^* 的区间序即为 G 的一个相对于 (P,N) 的探针区间序.

反之，设 G 有相对于 (P,N) 的一个探针区间序 $\sigma=[v_1,\cdots,v_n]$，即 σ 满足 (2) 式. 令 $\sigma_i=\{v_1,v_2,\cdots,v_i\}$. 任取实轴上的 $n+1$ 个点 $c<r_1<\cdots<r_n$，令

$$l_i=\begin{cases} c, & v_i\in P \text{ 且 } \sigma_i\subseteq N[v_i], \\ \max\{r_j: v_iv_j\notin E, j<i\}, & v_i\in P \text{ 且 } \sigma_i\not\subseteq N[v_i], \\ c, & v_i\in N \text{ 且 } P\cap\sigma_i\subseteq N[v_i] \\ \max\{r_j: v_j\in P, v_iv_j\notin E, j<i\}, & v_i\in N \text{ 且 } P\cap\sigma_i\not\subseteq N[v_i]. \end{cases} \tag{3}$$

对于每个顶点 v_i，$1\leqslant i\leqslant n$，构造开区间 $I_i=(l_i,r_i)$. 下面证明 $I=\{I_i: 1\leqslant i\leqslant n\}$ 是 G 的一个探针区间表示，即证明对于任意的 $1\leqslant i<j\leqslant n$，$v_iv_j\in E(G)$ 当且仅当 $I_i\cap I_j\neq\emptyset$ 且 $\{v_i,v_j\}\cap P\neq\emptyset$.

设 $v_iv_j\in E(G)$，由于 N 为 G 中的独立集，故 $\{v_i,v_j\}\cap P\neq\emptyset$. 我们断言 $I_i\cap I_j\neq\emptyset$. 否则可以分两种情况来分别导出矛盾.

1. $v_j\in P$. 由 $I_i\cap I_j=\emptyset$ 可知 $\{l: v_lv_j\notin E, l<j\}\neq\emptyset$. 否则，有 $\sigma_j\subseteq N[v_j]$，从而由 (3) 式可知 $l_j=c$ 和 $c\leqslant r_i<r_j$ 成立. 于是得到 $I_i\cap I_j\neq\emptyset$，这与假设 $I_i\cap I_j=\emptyset$ 相矛盾. 因此 $k=\max\{l: v_lv_j\notin E, l<j\}$ 存在，并且还可由 (3) 式进一步推出 $r_k=l_j$. 根据 $I_i\cap I_j=\emptyset$ 和 $r_i<r_j$ 得到 $r_i<l_j<r_j$. 这意味着 $r_i<r_k<r_j$，$i<k<j$. 但是由 $\{v_k,v_j\}\cap P\neq\emptyset$，$v_iv_j\in E(G)$，以及 (2) 式，发现 $v_kv_j\in E(G)$，这与 k 的取法相矛盾.

2. $v_j\in N$. 由 $I_i\cap I_j=\emptyset$ 可知 $\{l: v_lv_j\notin E, v_l\in P, l<j\}\neq\emptyset$. 取 $k=\max\{l: v_lv_j\notin E, v_l\in P, l<j\}$，同情况 1 可证 $r_k=l_j$，进而根据假设条件可得矛盾.

反之，假设 $I_i\cap I_j\neq\emptyset$ 且 $\{v_i,v_j\}\cap P\neq\emptyset$. 如果 $v_iv_j\notin E$. 由 I 中的区间皆为开区间和 $I_i\cap I_j\neq\emptyset$ 知，$l_j<r_i<r_j$. 而由 $v_iv_j\notin E$ 和 (3) 式可得 $r_i\leqslant l_j$，这是一个矛盾.

§3 STS-探针区间图的刻划

对于图 G 的一个顶点划分 (P,N)，令 $E_{P,N}=\{xy: xy\notin E, P\cap N(x)\cap N(y)\neq\emptyset\}$. 相

对于(P,N)构造一个新图$G_{P,N}:V(G_{P,N})=V(G)=P\cup N,E(G_{P,N})=E\cup E_{P,N}$. 如果$G=(P,N,E)$为探针区间图,下面将证明$G_{P,N}$是一个区间图,并进而得到STS-探针区间图的一个刻划. 首先准备三个引理.

引理1 设$I=\{I_v=(l_v,r_v):v\in V(G)\}$为探针区间图$G=(P,N,E)$的一个探针区间表示,$[v_1,\cdots,v_n]$是$G$的满足$r_{v_1}\leqslant r_{v_2}\cdots\leqslant r_{v_n}$的一个顶点排序. 如果$i<l<j$,且$v_iv_j\in E$,那么

a)如果$v_j\in P$,则$v_lv_j\in E$;

b)如果$v_j\in N$,则$v_lv_j\in E\cup E_{P,N}$.

证 设$G^*=(P\cup N,E^*)$是G相对于I的探针区间完备. 由(1)式,容易验证$[v_1,\cdots,v_n]$是G^*的一个区间序. 以下简记I_{v_i}为$I_i=(l_i,r_i)$,$1\leqslant i\leqslant n$.

因为$i<l<j$且$v_iv_j\in E\subseteq E^*$,由(1)式知$v_lv_j\in E^*$. 故而此时有$I_i\cap I_j\neq\varnothing,I_l\cap I_j\neq\varnothing$.

如果$v_j\in P$,则$v_lv_j\in E$,从而a)成立.

如果$v_j\in N$,则由$v_iv_j\in E$,得到$v_i\in P$. 下面分情况证明b)成立.

情况1. $v_l\in P$. 由$I_l\cap I_j\neq\varnothing$可得$v_lv_j\in E\subseteq E\cup E_{P,N}$.

情况2. $v_l\in N$. 令$E_2=\{xy:x\in N,y\in N,N(x)\subseteq N(y)\}$. 如果$v_iv_l\in E$,那么$v_i\in P\cap N(v_l)\cap N(v_j)$,故$v_lv_j\in E_{P,N}$. 如果$v_iv_l\notin E$,则$I_i\cap I_l=\varnothing$. 这时因为$r_i\leqslant r_l\leqslant r_j$和$I_i\cap I_j\neq\varnothing$,有$I_l\subseteq I_j$,进而可得$N(v_l)\subseteq N(v_j)$. 所以$v_lv_j\in E_2\subseteq E_{P,N}\subseteq E\cup E_{P,N}$也成立.

引理2 设$I=\{I_v=(l_v,r_v):v\in V(G)\}$为探针区间图$G=(P,N,E)$的一个探针区间表示,$[v_1,\cdots,v_n]$是$G$的满足$r_{v_1}\leqslant r_{v_2}\cdots\leqslant r_{v_n}$的一个顶点排序. 如果$i<l<j$,且$v_iv_j\in E_{P,N}$,那么$v_lv_j\in E\cup E_{P,N}$.

证 由$v_iv_j\in E_{P,N}$知道$v_iv_j\notin E$,并且存在$v_k\in P$使得$v_iv_k,v_kv_j\in E$. 下面根据k与l的大小关系,来分情况讨论.

情况1. $l=k$. $v_lv_j=v_kv_j\in E\subseteq E\cup E_{P,N}$显然成立.

情况2. $i<l<k$. 由引理1的a)可得$v_kv_l\in E$. 如果$v_lv_j\in E$,结论已证;如果$v_lv_j\notin E$,则$v_k\in P\cap N(v_j)\cap N(v_l)$,从而$v_lv_j\in E_{P,N}\subseteq E\cup E_{P,N}$.

情况3. $k<l<j$. 根据引理1可得$v_lv_j\in E\cup E_{P,N}$.

引理3 设图G是一个二分类为(P,N)的二部图. 如果$G_{P,N}$是区间图,$I=\{I_v:v\in V(G)\}$为$G_{P,N}$的一个区间表示,那么G是相对于(P,N)的探针区间图,I是G的一个探针区间表示.

证 因为P和N皆为G中的独立集,所以$E_{P,N}=\{(x,y):x\in N,y\in N,P\cap N(x)\cap N(y)\neq\varnothing\}$. 由定义可直接验证$G$是相对于$(P,N)$的探针区间图,$I$是$G=(P,N,E)$的一个探针区间表示.

定理3 对于任意的探针区间图$G=(P,N,E)$,$G_{P,N}$是一个区间图.

证 设$I=\{I_v:v\in V(G)\}$为$G=(P,N,E)$的一个探针区间表示,$\sigma=[v_1,\cdots,v_n]$是G满足$r_{v_1}\leqslant r_{v_2}\leqslant\cdots\leqslant r_{v_n}$的一个顶点排序. 根据定理1,只需要证明$\sigma$是$G_{P,N}$的一个区间序,即:如果$i<l<j$且$v_iv_j\in E\cup E_{P,N}$,则$v_lv_j\in E\cup E_{P,N}$. 有如下两种情况:

情况1. $v_iv_j\in E$. 由引理1可知$v_lv_j\in E\cup E_{P,N}$.

情况2. $v_iv_j\in E_{P,N}$. 由引理2可得$v_lv_j\in E\cup E_{P,N}$.

定理4 对于任意的STS-探针区间图$G=(P,N,E)$,$G_{P,N}$是G的一个探针区间完备.

证 由定理 3 知 $G_{P,N}$是区间图. 设 $I=\{I_v: v\in V(G)\}$为 $G_{P,N}$的一个区间表示. 依据引理 3 知道 I 是 G 的一个探针区间表示,因此 $G_{P,N}$是 G 的一个探针区间完备.

定理 5 图 G 是相对于(P,N)的 STS-探针区间图当且仅当 G 是二分类为(P,N)的二部图并且 $G_{P,N}$为区间图.

证 必要性由定理 4 可得;充分性是引理 3 的推论.

设图 G 是二分类为(X,Y)的二部图,其中$|X|=k$. 对于顶点 $y\in V(G)$和顶点子集 X 的一个线性排序 $\sigma=[x_1,\cdots,x_k]$,称点 y 在 σ 中是连续的[18],如果 σ 满足:

$$\text{若 } x_i,x_j\in N(y), i<l<j, \text{则 } x_l\in N(y). \tag{4}$$

如果 G 的顶点子集 X 有一个线性排序 σ,使得任意的顶点 $y\in Y$ 在 σ 中都是连续的,那么称图 G 为相对于(X,Y)的凸二部图(convex bipartite graph). 凸二部图作为一个有趣的图类,已有很多研究,见[19-24]. 下面说明凸二部图其实就是 STS-探针区间图,这也提供了对 STS-探针区间图的另一种刻划.

定理 6 二分类为(P,N)的二部图 G 是相对于(P,N)的 STS-探针区间图当且仅当 G 是相对于(P,N)的凸二部图.

证 设 G 是相对于(P,N)的凸二部图,$\sigma=[v_1,\cdots,v_k]$是 P 的一个线性排序,使得任意的点 $u\in N$ 在 σ 中都是连续的. 对于每个顶点 $v_i\in P$,构造区间 $I_i=[l_i,r_i]$,使得 $l_1<r_1<\cdots<l_k<r_k$;对于每个顶点 $u\in N$,构造区间 $I_u=[r_t,r_l]$,其中 $t=\min\{j: v_j\in N(u)\}$,$l=\max\{j: v_j\in N(u)\}$. 由定义容易验证 $I=\{I_i: 1\leqslant i\leqslant k\}\cup\{I_u: u\in N\}$是 G 的一个相对于(P,N)的探针区间表示,G 是相对于(P,N)的 STS-探针区间图.

反过来,设 G 是相对于(P,N)的 STS-探针区间图,$I=\{I_v=[l_v,r_v]: v\in P\cup N\}$是 G 相对于(P,N)的一个探针区间表示. 设 $\sigma=[v_1,\cdots,v_k]$是 P 的满足 $l_{v_1}<l_{v_2}<\cdots<l_{v_k}$的一个线性排序. 因为每一个顶点 $u\in N$ 在 σ 中都是连续的,所以 G 是相对于(P,N)的凸二部图.

§4 STS-探针区间图的判别算法

如果矩阵 A 行置换相抵于一个每一列中的元素 1 都相继出现的(0,1)矩阵,则称 A 具有列连 1 性(consecutive one's property for columns)[3]. 设图 G 是二分类为(X,Y)的二部图,其中 $X=\{x_1,\cdots,x_k\}$,$Y=\{y_1,\cdots,y_l\}$. 构造(0,1)矩阵 $A=(a_{ij})_{k\times l}$,其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果}(x_i,y_j)\in E(G);\\ 0, & \text{如果}(x_i,y_j)\notin E(G).\end{cases} \tag{5}$$

根据定理 6,G 是相对于(X,Y)的 STS-探针区间图当且仅当 A 具有列连 1 性. 可以使用 PQ-树算法在 $O(|V|+|E|)$时间内检查 A 是否具有列连 1 性[3,21],从而对 G 是否为相对于(X,Y)的 STS-探针区间图作出判断. 这就给出了 STS-探针区间图的一种简易的判别算法.

根据定理 5,我们知道 G 是相对于(X,Y)的 STS-探针区间图当且仅当 $G_{X,Y}$是区间图. 因此我们也可以先构造新图 $G_{X,Y}$,通过直接检查 $G_{X,Y}$是否为区间图来判断 G 是否是相对于(X,Y)的 STS-探针区间图. 构造 $G_{X,Y}$和检查 $G_{X,Y}$是否为区间图都可以在 $O(|V|+|E|)$时间内完成[3,4],这样我们就得到另一种 $O(|V|+|E|)$时间的 STS-探针区间图的判别算法.

参考文献:

[1] Carrano A V, de Jong P J, Branscomb E, et al. Constructing chromosome-and-region-specific cosmid maps of the human genome[J]. Genome, 1989, 31: 1059-1065.

[2] Golumbic M C. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs[J]. New York: Academic Press, 1980, 13-17.

[3] Booth K S, Lueker S G. Testing for consecutive ones property, interval graphs and planarity using PQ-tree algorithms[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1976, 13: 335-379.

[4] Korte N, Möhring R H. An incremental linear time algorithm for recognizing interval graphs[J]. SIAM Journal on Computing, 1989, 18: 68-81.

[5] Watherman M S, Griggs J R. Interval graphs and maps of DNA [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1986, 48: 189-195.

[6] Fischer S G, Cayanis E, Russo J, et al. Assembly of ordered contigs from YAC-selected cosmid of human chromosome 13[J]. Genomics, 1994, 21: 525-537.

[7] Zhang P, Schon E A, Fischer S F, et al. An algorithm based on graph theory for the assembly of contigs in physical mapping of DNA[J]. Comput Appl Biosci, 1994, 10: 309-317.

[8] Zhang P. Probe interval graph and its application to physical mapping of DNA. Technical report [R]. Available online at http://recomb2000. ims. u-tokyo. ac. jp.

[9] McMorris F R, Wang C, Zhang P. On probe interval graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1998, 88: 315-324.

[10] Sheng L. Cycle free probe interval graphs[J]. Congressus Numerantium, 1999, 140: 33-42.

[11] Johnsons J L, Spinrad J P. A polynomial time recognition for probe interval graphs [A]. Proccedings of the Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 01) [C]. 2001, 477-486.

[12] McConnell R M, Spinrad J P. Construction of probe interval models [A]. Proccedings of the Thirteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 02) [C]. 2002, 866-875.

[13] Sheng L, Wang C, Zhang P. Tagged probe interval graphs [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2001, 5: 133-142.

[14] Golumbic M C, Lipshteyn M. On the hierarchy of interval, probe and tolerance graphs [J]. Congressus Numerantium, 2001, 153: 97-106.

[15] Alzadeh F, Karp R M, Weisser D K, et al. Physical mapping of chromosomes using unique probes [J]. Journal of Computational Biology, 1995, 2(2): 159-184.

[16] Golumbic M C, Kaplan H, Shamir R. On the complexity of DNA physical mapping[J]. Advances in Applied Mathematics, 1994, 15: 251-261.

[17] Jain M, Myers E W. Algorithms for computing and integrating physical maps using unique probes [J]. Journal of Computational Biology, 1997, 4(4): 449-466.

[18] Ramalingam G, Pandu R C. A uniform approach to domination problems on interval graphs[J]. Information Processing Letters, 1988, 27: 271-274.

[19] Glover F. Maximum matching in a convex bipartite graph[J]. Naval Res Logist Quart, 1967, 14: 313-316.

[20] Lipski W,Preparata F P. Efficient algorithms for finding maximum matchings in convex bipartite graphs and related problems[J]. Acta Information,1981,15:329-346.

[21] Brandstädt A,Le V B,Spinrad J P. Graph Classes-A Survey[A]. SIAM Monographs on Discrete Math and Appl[C]. Philadelphia:SIAM,1999,93-94.

[22] Czumaj A,Diks K,Przytycka T M. Parallel maximum independent set in convex bipartite graphs [J]. Information Processing Letters,1996:59,289-294.

[23] Brandstädt A,Spinrad J P,Stewart L. Bipartite permutation graphs are bipartite tolerance graphs [J]. Congressus Numerantium,1987,58:165-174.

[24] Müller H. Recognizing interval digraphs and interval bigraphs in polynomial time[J]. Discrete Applied Mathematics,1997,78:189-205.

Probe interval graphs and STS-probe interval graphs

KONG Jing[1],WU Yao-kun[1,2]

(1. *Dept. of Math., Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai* 200240,*China*;
2. *College of Advanced Science and Technology*,*Dalian Univ. of Technology*,*Dalian* 116024,*China*)

Abstract: The so-called probe interval order of the vertex set of a graph is proposed, and a graph is a probe interval graph if and only if its vertex set permits a probe interval ordering. For any graph G and any vertex bipartition(P,N) of G,a new graph $G_{P,N}$ which is a supergraph of G with the same vertex set is constructed. It is found that when G is an STS-probe interval graph $G_{P,N}$ turns out to be a probe interval completion of G. Conversely,for any bipartite graph G it is proved that if $G_{P,N}$ is an interval graph then G must be an STS-probe interval graph with respect to the bipartition. It is also found that the class of STS-probe interval graphs is nothing but the class of convex bipartite graphs studied in literature independently. Finally, based on characterizations of STS-probe interval graphs, two simple recognition algorithms for STS-probe interval graphs of $O(|V|+|E|)$ time are presented.

Key Words: interval graph; probe interval graph; STS-probe interval graph; convex bipartite graph

MR Subject Classification: 05C17