99 研究生计算方法试题（A 卷）

姓名___________　　班级__________

一、填空题：（每小题 4 分）

1. 设 P＝3.14159 是π的近似值，则该近似值具有____位有效数字；　绝对误差限为_____；相对误差限为______。

2.设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$　　$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，　则求解方程 Ax=b 的 Gauss-Seidel 迭代法的迭代公式是______。

3. 用 Jacobi 迭代公式 xk+1=Jxk 求解方程 Ax=b, 对于以下几种情况，　一定收敛的是：_____

A. A 为严格对角占优阵　　　B.J 为严格对角占优阵

C.A 为对称正定阵　　　　　D.A 的谱半径小于 1

E.J 的谱半径小于 1　　　　F.J 的列范数小于 1

4. 对矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&4&6\\-3&14&24\\1&0&12\end{bmatrix}$ 作 LU 分解，则 L=______;U=_______。

5.用 Newton 迭代求 $f(x)=x^2-x-2$ 的零点 x=-1 的近似值，若取 $x_0=-0.9$，则 $x_1=$______。

6.为了计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值，对积分区间 n 等分，$h=\dfrac{b-a}{n}$ 为步长，$H_n=h\sum_{i=0}^{n-1}f[a+(i+\frac{1}{2})h]$ 为复化中矩形公式，T_n 为复化梯形公式，T_{2n} 为步长减半后的复化梯形公式，

$$S_n=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+\frac{1}{2})h)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)+f(b)]$$ 为复化 Simpson 公式，

则 S_n,T_n 和 H_n 所满足的关系为____。

7.设 $f(x)\in C^4[0,1]$，则求积公式

$$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]+\frac{1}{12}[f'(0)-f'(1)]$$

的余项为_________。

8.设 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 为[a,b]上 n+1 个互异的节点，$l_0(x),l_1(x),\ldots,l_n(x)$ 是拉格朗日插值基函数, 则 $\sum_{i=0}^{n}x_i^{n+1}l_i(0)=$______。

9.已知 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx$ 是初始问题 $\begin{cases}y'=ax+b\\y(0)=0\end{cases}$ 的精确解，h 为步长，y_n 是由梯形公式求解上述问题在 $x_n=nh$ 的近似值，则局部截断误差 $y(x_n)-y_n=$_______。

10.设 $u=\frac{1}{3}(2,2,1)^T,H=I-2uu^T$,其中 I 为单位阵，则矩阵 H 的谱半径是__________。

二、设

$$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

n 为[0,1]区间的等分数，分别取 n=1,n=2 和 n=4 用复化梯形公式计算 I 的近似值 T_1, T_2 和 T_4 并用 Romberg 方法进行加速。（最终结果保留 5 位小数） （15 分）

三、设 $f(x)\in C^2[a,b]$ 证明：

若 *f(a)=f(b)=0*,则：

$$\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\ge \frac{12}{(b-a)^3}\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

一般地，有：

$$\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\ge \frac{12}{(b-a)^3}\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)\right|$$

(15 分)

四、给出下表的数据，

1)用最小二乘法求一个形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式；

2)对任意多个点的拟合问题，应如何合理地定义拟合的均方误差？

i	1	2	3	4	5
xi	44	38	31	25	19
yi	97.8	73.3	49.0	32.3	19.0

（15 分）

五、已知 $u=(2,5,2,2,1,)^T$，求一个初等反射阵 H，使得：

$$Hu=(2,5,-3,0,0)$$

（15 分）

00 研究生计算方法试卷 A

一、（20 分）

设

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&1&2\\4&2&1\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}20\\-7\\-18\end{pmatrix}$$

记

$$J(u)=\frac{1}{2}(Au,u)-(b,u) \qquad u\in R^3$$

1) 给出 $J(u)$ 在 R^3 中的点 u^* 取得极值的必要条件

2) 用数值方法求解 1)中的 u^*

3) 求正交阵 H，使 HAH 为三对角阵

4) 求 $\|HAH\|_1$ 和 $\|HAH\|_\infty$

5) 写出求解 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的格式

二、（15 分）

1) 试证

$$\begin{cases} y'=f(x), a\le x\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

的四阶 Runge-Kutta 法是：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(f(x_n)+4f(x_n+\frac{h}{2})+f(x_n+h))$$

2) 它与数值积分有什么关系

3) 取 $[a,b]=[0,1], f(x)=x^2e^{2x}, y_0=\frac{1}{4}, h=0.2$

用 1)中的格式求 $y(h)$ 的近似值 y_1

4) 计算误差 $y(h)-y_1$ (保留六位小数)

三、（15 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 的两个特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，对应的特征向量分别为 $v_1=(1,0)^T$ 与 $v_2=(1,1)^T$，取初始向量 $x_0=v_1+v_2$．作迭代

$$\begin{cases} y_k=Ax_k \\ x_k=\dfrac{y_k}{2} \quad k=1,2,3,\ldots\cdots \end{cases}$$

1) 写出 x_k 的精确表达式

2) 计算 $\tau_8=\dfrac{x_8^TAx_8}{x_8^Tx_8}$

3) 计算 $\|x_8-v_2\|_1$ 与 $|\tau_8-\lambda_2|$

四、（20 分）

设对任意给定的 $\varepsilon>0$, $f'(x)$在$[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$上连续。定义

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(t)dt$$

1)证明：求 $f_\varepsilon'(x)=0$ 的 Newton 迭代公式为：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n+\varepsilon)-f(x_n-\varepsilon)}{f'(x_n+\varepsilon)-f'(x_n-\varepsilon)} \qquad (*)$$

2)设 x_ε^* 是 $f_\varepsilon'(x)$ 的零点，如果在 x_ε^* 的领域内 $f_\varepsilon''(x)$ 满足

$$|f_\varepsilon''(x)-f_\varepsilon''(y)|\le L|x-y|$$

且 $f_\varepsilon''(x_\varepsilon^*)\ne 0$。 证明对于充分靠近 x_ε^* 的初值 x_0 迭代公式(*) 所产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_ε^*。

五、（15 分）

已知试验数据如下：

x	3	2	1
y	9.296	6.078	2.000

且有经验知 x, y 间有关系：$y=a_1x+a_2\ln x$, 用最小二乘法求系数 a_1、a_2 和均方误差

六、（15 分）

设 $f(x)$ 在 [0,1] 上具有连续的四阶导数，且 $f(0), f(1), f'(0)$ 和 $f'(1)$ 已知。

1) 求满足条件

$$H(0)=f(0) \qquad H(1)=f(1)$$
$$H'(0)=f'(0) \quad H'(1)=f'(1)$$

三次 Hermite 插值多项式

2)构造如下的数值积分公式：

$$I=\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]+\frac{1}{12}[f'(0)-f'(1)]$$

并求余项

01 研究生计算方法试题（A）

一、填空题（选做其中 10 题，每小题 3 分）

1.对方程 $Ax=b$ 用 Gauss 消元法求解，其中 $A=\begin{bmatrix}2&5&2\\1&2&3\\3&1&5\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}8\\12\\13\end{bmatrix}$ 则第一步消元相当于方程两边左乘矩阵 $L_1=[\ \ ]$

2. 以下叙述中正确的是__________（多项选择）

①方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内有根 x^*，且 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$f(a),f(b)$ 异号，则用二分法求 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上的根一定收敛于 x^*。

②用 SOR 迭代法解线性方程组 $Ax=b$，如果 SOR 方法收敛,则 ω 必满足：$0<\omega<2$。

③用 Newton 迭代求方程 $f(x)=0$ 的根，若收敛，则收敛阶数必为二阶。

④若 A 为严格主对角占优阵，则求解方程 $Ax=b$ 的 Gauss-Seidel 迭代必收敛

3.在直角坐标系中画出 $y=f(x)$的一种图形,使得用 Newton 迭代法解 $f(x)=0$ 的近似根时发散,并在 x 轴上标明 x_0 的位置。

4. 用 $\begin{cases}x_1^{(k)}=\dfrac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k-1)})\\ x_2^{(k)}=\dfrac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(k-1)})\end{cases}$ $(k=1,2,3,\ \ )$求方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$

$(a_{11}, a_{22} \neq 0)$ 的近似解，则迭代收敛的充要条件是________

5.设 A 是非奇异矩阵，$Ax = b \neq 0$ 且 $A(x+\delta x) = b + \delta b$，则解的相对误差 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ 的上限为____

6. 一个次数不高于 5 次的多项式 $P_5(x)$，满足 $P_5(0) = f(0), P_5^{'}(0) = f^{'}(0), P_5(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}), P_5^{'}(\frac{1}{2}) = f^{'}(\frac{1}{2}), P_5(1) = f(1), P_5^{'}(1) = f^{'}(1)$ 且 $f^{(6)}(x)$ 连续，则该插值多项式的余项 $f(x) - P_5(x) =$________

7.求次数不超过 3 次，且满足下列条件的插值多项式：

x	0	1	2	3
f(x)	1	1	1	
f’(x)				0

该插值多项式为 _____________

8.切比雪夫（Tchebycheff）多项式所满足的递推关系式为：

$T_{n+1}(x) =$______$T_n(x)$_______$T_{n-1}(x)$

其中 $T_0(x) =$______，$T_1(x) =$________

9. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ 在 *[-1,1]* 上的一次最佳一致逼近多项式是_____

10. 用求解 $\int_a^b f(x)dx$ 的梯形公式 $T = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$ 和中矩形公式 $H = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ 作组合，得到具有高精度的求积公式 S，则 S=____________

11. 设用 n 等分 *[0,1]* 区间的复化梯形公式求积分 $\int_0^1 e^x dx$，

当 $n \geq$______时，保证误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$

12. 设 $f(x,y)$ 关于 y 满足李普希兹（Lipschitz）条件，即：

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$，$y_n$ 是用欧拉（Eular）公式

求得的方程 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 x_n 处的近似值，记 $e_n = y(x_n) - y_n$

为整体截断误差，则 e_n 所满足的关系式为 $e_n \leq$________

13.设 $f(x) = e^x$，用分段线性插值求 $f(x)$ 在区间 *[0,1]* 中的近似值，则当等分区间的步长 $h \leq$_______时，绝对误差 $\leq 1 \times 10^{-6}$

14.初等反射阵（Householder 阵）的全部可能的特征值是_________

15.设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ 的定义是

____

二、（14 分）

1)试导出解 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的中点折线法：

$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$ *n=1,2,⋯*

2) 若 1）中的 $f(x,y)=-\dfrac{1.2}{2+x^2}y$， 试用中点折线法求解 y_2 (取步长 *h=0.02*)，并与精确解比较（保留四位小数）

三、（14 分）

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

1) 用 Householder 法求 A 的 QR 分解;
2) 用 QR 分解法求解 Ax=b，其中 $b=(-1,4,1)^T$。

四、（14 分）

已知插值条件

i	0	1	2
xi	1	2	3
yi	0	3	0

与边界条件：$y_0'=y_2'=0$

1) 建立求解 *y=f(x)* 在[1,3] 上三次样条插值函数 *S(x)* 的三弯矩法；
2) 求出 *S(x)*。

五、（14 分）

设 $f(x)=e^{2x}$， $x\in[-1,1]$，

1) 导出 $S_3(x)$ 是 *f(x)* 在 $\Phi_3=Span\{1,x,x^2,x^3\}$ 上最佳平方逼近函数的必要条件；
2) 求 *f(x)* 在 $\Phi_2=Span\{1,x,x^2\}$ 上的最佳平方逼近函数

六、（14 分）

设线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

写出该方程组的 Jacobi 迭代法和 SOR 迭代法的计算公式，并确定当 *a* 为何值时① Jacobi 迭代法收敛② Gauss-Siedel 迭代法收敛

02 研究生计算方法试卷 A

一、设 $f(x) \in C^2[a,b],\ f(a) = f(b) = 0$

证明：

$$\max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)| \qquad (16分）$$

二、记方程 $3-3x-2\sin x = 0$ 在[0, 1] 内的根为 x^*

若采用如下迭代：$x_{k+1} = 1 - \frac{2}{3}\sin x_k$ (k= 0,1,2,….)

1. 证明：对 $\forall x_0 \in R$，均有 $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$
2. 取 $x_0 = 0$ 要迭代多少次能保证误差 $|x_k - x^*| < 10^{-6}$?
3. 此迭代的收敛阶是多少？证明你的结论。（16 分）

三、设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. 求矩阵 A 的条件数 $Cond_1(A)$
2. 设 $x^{(k)}$ 是由 Jacobi 迭代求解方程组 *Ax=b* 所产生的迭代向量，$x^{(0)} = (1,1)^T$ 写出 $x^{(k)}$ 的精确表达式（*k=0,1,2,3,….*）
3. 设 x^* 是 *Ax=b* 的精确解， 写出误差 $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ 的精确表达式
4. 如构造如下的迭代公式 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(Ax^{(k)} - b)$ 解方程 *Ax=b*，试确定 ω 的范围，使迭代收敛。（20 分）

四、1.设 $\{P_n(x)\}$ 是 *[0,1]* 区间上带权 $\rho(x) = x$ 的最高次项系数为 1 的正交多项式系，求 $P_2(x)$

2. 构造如下的 Gauss 型求积公式

$$\int_0^1 x f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

（16 分）

五、设有常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = A(t)\vec{u}(t) + \vec{b}(t) \\ \vec{u}(t_0) = \vec{a} \end{cases} \qquad (1)$$

其中 $\vec{u}(t)$、$\vec{b}(t)$、$\vec{a}$ 为 *n* 维向量，*A(t)* 为 *n*×*n* 矩阵

1. 建立求（1）数值解的向前 Eular 折线法格式
2. 用上述方法解

$$\begin{cases} u'' = -tu' - t^2 u + t + 1, \quad 0 < t < 0.1 \\ u(0) = 1, u'(0) = -1 \end{cases}$$

取 *h=0.01* 求 *u(0.01), u'(0.01)*（16 分）

六、 矩阵 A 的 ST 算法定义为：1) 将 A 作 ST 分解 $A=S_1T_1$，2) 令 $A_2=T_1S_1$，并对 A_2 作 ST 分解 $A_2=S_2T_2$，3) 重复 2) 的过程得到 $A_n=T_{n-1}S_{n-1}$ ，$n=1,2,\cdots$

设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ ST 分解取为矩阵的 LU 分解

1. 求出 A_2,A_3,A_4；
2. 证明 A 与 A_n 相似；
3. 证明 U_n 的两个对角元相乘积为 1；
4. 观察变化趋势,求 $\lim\limits_{n\to\infty}L_n,\lim\limits_{n\to\infty}U_n,\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ （16 分）

03 研究生《计算方法》试卷（A）

一、（10 分）

证明

若 *f(a)=f(b)=0*,则：

$$\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\geq\frac{12}{(b-a)^3}(\int_a^b f(x)dx)$$

二、（14 分）

已知 (x_i,y_i) , $(i=0,1,\cdots,N)$ 及拟合这批数据的非线性数学模型 $y(x)=ae^{-bx}$（a,b 为待定参数）

1．如何将非线性模型线性化？

2．写出线性化模型中待定系数的法方程。

3．设数据 (x_i,y_i) , $(i=0,1,\cdots,N)$ 如下：

x_i	0	1	2	3
y_i	2.010	1.210	0.7400	0.4500

求出拟合上述数据的非线性拟合函数。

三、（14 分）

给定求解常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的线性多步公式

$$y_{n+1}=\alpha(y_n+y_{n-1})+h[\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n-1}]$$

其中： $f_n=f(x_n,y_n)$, $f_{n-1}=f(x_{n-1},y_{n-1})$

试确定系数 α,β_0,β_1，使它具有二阶精度，并推导其局部截断误差主项。

四、（14 分）

求以 0，1，2 为样条节点并满足下列插值条件的三次样条函数 *S(x)*：

S(0)=0, S'(0)=0;

S(1)=1;

S(2)=0, S'(2)=0.

五、（17 分）

设 $A=I_n+\alpha ee^T$，其中：I_n 为 n 阶单位阵，α 为非零实数，$e=(1,1,\cdots,1)^T$

1．试确定 α 之值，使得 A 为 $Householder$ 阵（初等反射阵）

2．取 $\alpha=1$，求 A 的 ∞-条件数 $\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$

六、（14 分）

设 A 为对称正定矩阵. 考虑迭代格式：

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\omega[A(\frac{x^{(k+1)}+x^{(k)}}{2})-b],\quad \omega>0$$

1． 求证：对任意初始向量 $x^{(0)}$，序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛，且收敛到 $Ax=b$ 之解.

2． 取 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，$\omega=2$。求上述迭代的收敛速度。

七、（17 分）

设 n 阶实矩阵 A 的特征值满足：$|\lambda_1|<|\lambda_2|\le|\lambda_3|\le\cdots\le|\lambda_n|$，对应的特征向量满足 $x_i(i=1\sim n)$ 满足 $(x_i,x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\ne j\end{cases}$。求矩阵 A 的按模最小特征值 λ_1 的算法如下：

$$\begin{cases}Az^{(m)}=x^{(m-1)}\\ \lambda^{(m)}=\dfrac{1}{\max(z^{(m)})}, \qquad m=1,2\ldots\ldots\\ x^{(m)}=\lambda^{(m)}z^{(m)}\end{cases}$$

其中：$\max(z^{(m)})$ 表示向量 $z^{(m)}$ 的绝对值最大的分量，$x^{(0)}$ 为任一非零向量。记 $R(x)$ 为向量 x 的 Rayleigh 商。

1． 证明：$\lim_{m\to\infty}\lambda^{(m)}=\lambda_1$

2． 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，对 A 作 LU 分解

3． 取 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，计算计算 $\lambda^{(2)}$，$x^{(2)}$ 和 $R(x^{(2)})$

研究生计算方法期末考试试卷 A（2004.1）

一、 已知线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1） 求出系数矩阵的行范数和 F-范数。

2）作系数矩阵的 LU 分解并求解这个方程组。

（15 分）

二、 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是二阶方阵，且 $a_{11}a_{22}\neq 0$。证明：求解方程组 $Ax=b$ 的雅可比方法与高斯－赛德尔方法同时收敛或发散。

（15 分）

三、写出三次样条函数的定义，并求以 0，1，2 为样条节点，满足下列插值条件的三次样条函数 *S(x)*：

S(0)=0, S'(0)=0;

S(1)=2;

S(2)=0, S'(2)=0.

（15 分）

四、设 $x_1,\dots,x_n$ 为 n 个正数，试求 y 使得：

1） 绝对误差的平方和 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y)^2$ 最小。

2） 相对误差的平方和 $\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-y}{y})^2$ 最小。

（10 分）

五、给出下表的数据，

1)用最小二乘法求一个形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式，并求均方误差。

2)对任意多个点的拟合问题，试用数值积分的思想合理地定义拟合的均方误差，将你得到的公式重新计算 1) 中的均方误差

i	1	2	3	4	5
xi	44	38	31	25	19
yi	97.8	73.3	49.0	32.3	19.0

（15 分）

六、1） 用牛顿法求 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的实根，精确到四位有效数字。

2） 从牛顿法的迭代公式和误差比的近似公式：

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{f''(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2}$$

以及 $x_{n+1}-x_n=e_{n+1}-e_n, x^*=x_n-e_n$ 推出改进的牛顿迭代公式：

$$x_{n+1}^*=x_n-\frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2-\frac{1}{2}f''(x_n)f(x_n)}.$$

在 1）中，仍设 $x_0=2$，算出 x_1^*.

（15 分）

七、1） 设 $x\in R^2$，给出一种算法确定如下形式的正交阵：

$$Q=\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix},\quad c^2+s^2=1.$$

使得 Qx 的第二个分量为零。

2） 利用 1）中的算法求出矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解。

（15 分）

2005 计算方法试题

一、选择题（每题 1 分）

1．某数值方法算得 $\sin\dfrac{\pi}{6}$ 的值为 $t=0.500012$，则 t 具有( )位有效数字

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D.5

2．函数 $\varphi(x)=x$ 与 $\phi(x)=(3x^2-1)/2$ 在区间 $[-1,1]$ 上（　）

A. 线性相关　　B. 线性无关但不正交

C. 正交但非标准正交　　D. 标准正交

3．用 Euler 折线法解初值问题 $\begin{cases} y'=x+y \\ y(0)=1 \end{cases}$，取步长 $h=0.1$，算得 $y(0.2)=(\ )$

A. 1　　B. 1.1　　C. 1.21　　D. 1.22

4．设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，则 A 的用 $\infty-$ 范数定义的条件数 $Cond_\infty(A)=$（　）

A. 4　　B. 14　　C. 42　　D. 56

5．用迭代法 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 解方程 $f(x)=0$，若 $f(x)$ 可导且 $0<m\le f'(x)\le M$，则当 λ 满足（　）时，该迭代过程一定收敛

A. $|\lambda|<2/M$　　B. $-2/m<\lambda<2/M$

C. $0<\lambda<2/M$　　D. $-2/M<\lambda<2/m$

二、填空题（每空格 1 分）

1． $f(x)=a_nx^n+1,$ 则 n 阶差商 $f[x_0,x_1,...,x_n]=$____________

2．求次数不超过 3 次，且满足下列条件的插值多项式：

x	0	1	2	3
f(x)	1	1	1	
f'(x)				0

该插值多项式为 ______________

3．设

$$S(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1) & 1\le x\le 3 \end{cases}$$

是[0,3] 上的三次样条函数，则 a=____________b= ____________

c=_______________

三、计算证明题：

1．（10 分）

数值积分公式形如：

$$\int_0^1 xf(x)dx \approx Af(0)+Bf(1)+Cf'(0)+Df'(1)$$

确定求积公式中的系数 A、B、C、D 使其代数精度尽可能高。

2．（15 分）

求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y), & x\in[x_0,T] \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

的 Runge-Kutta 公式如下：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h[(1-\alpha)K_1+\alpha K_2] \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2\alpha},y_n+\frac{h}{2\alpha}K_1) \end{cases}$$

（1） 证明：对于任意参数 $\alpha\ne 0$，该方法的局部截断误差是 $O(h^3)$；

（2） 对于常微分方程

$$\begin{cases} y'=x^2+y^2 & x\in[0,1] \\ y(0)=1 \end{cases}$$

用上述方法,取 $h=0.1,\alpha=\frac{1}{4}$ 迭代 1 步。

3．（15 分）

带原点平移的 QR 方法为：从 $A_1=A$ 出发，作

$$\begin{cases} A_k-s_kI=Q_kR_k \\ A_{k+1}=R_kQ_k+s_kI \end{cases} \quad k=1,2,.......$$

其中 A_k 为 n 阶矩阵，I 为 n 阶单位阵，R_k 为 n 阶上三角阵，Q_k 为 n 阶正交阵，

$s_k = (A_k)_{n,n}$ (A_k 的第 n 行 n 列的元素）为平移参数。

（1） 证明: A_k 与 A_{k+1} 相似

（2） 若 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，用带原点平移的 QR 方法求 A 的全部特征值

4. （15 分）

设 $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in [1,2]$, 求 $f(x)$ 在 [1,2] 上的二次最佳平方逼近多项式。并求均方误差。

5. （15 分）

方程 $\cos x - 4x + 2 = 0$ 解的迭代格式为

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos x_n$$

(1) 证明：对任意初值 x_0,上述迭代格式收敛。

(2) 求最小的 n ,使得 $|x_{n+1} - x_n| \le 10^{-3} |x_1 - x_0|$

(3) 对上述方程的解构造 Newton 迭代格式，判断它对任意初值是否也收敛。

6. （20 分）

设线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) 写出该方程组的 Jacobi 迭代法和 SOR 迭代法的计算公式;

(2) 确定 a 为何值时

（a） Jacobi 迭代法收敛

（b） Gauss-Siedel 迭代法收敛

2006 研究生计算方法试卷（A）

一、（10 分）

给定线性方程组 $Ax = b$ 为：

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) 当 a＝2 时，写出求解 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidal 迭代法的迭代格式。

(2) 确定 a 的取值范围，使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛。

(3) 当 a＝1 时，求 $\|A\|_\infty$。

二、（10 分）

设数值积分公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A(f(x_1)+f(x_2))$$

选取 A, x_1, x_2 使代数精确度尽可能高，并确定上述公式的代数精确度。

三、（10 分）

设迭代函数 $\phi(x)=x+c(x^2-3)$ 。

(1) 确定 c 的取值范围，使当初值充分靠近不动点 $\sqrt{3}$ 时，迭代格式 $x_{k+1}=\phi(x_k)$ （*k=1,2,…..*）产生的序列$\{x_k\}$收敛于 $\sqrt{3}$ 。

(2) c 取何值时，收敛得最快？

(3) 取 $c=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$， $x_0=1.5$ 计算 $\phi(x)$ 的不动点 $\sqrt{3}$，要求

$$|x_{k+1}-x_k|<10^{-4}$$

四、（12 分）

给定三维空间的一组点 (x_k, y_k, z_k) 如下表，利用最小二乘法求出空间一张过原点的平面来逼近这些点。

（提示：空间平面方程的一般式： $Ax+By+Cz+D=0$ ）

k	1	2	3	4
x_k	1	1	1	1
y_k	0	1	2	3
z_k	0.6891	0.1906	-0.3011	-0.7985

五、（18 分）

给定结点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 。设函数 $S(x)\in C^{'}[a,b]$, 在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$（ $i=0,1,\ldots,n-1$ ）上为二次多项式，且 $S(x_i)$ 等于给定的数值 $y_i=f(x_i)$, $i=0,1,\ldots n$，则称函数 *S(x)*为区间 $[a,b]$ 上的插值二次样条函数。如 $S^{'}(x_0)=y_0'$，那么求解这样的 *S(x)* 称为二次样条函数第一类插值问题。设 $x_k=a+kh, h>0, k=0,1,\ldots,n$ （等距结点），*S(x)* 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式为：

$$S(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)(x-x_{i+1}) \quad , \quad i=0,1,\ldots,n-1$$

推导$\{a_i, b_i, c_i\}$（ $i=0,1,\ldots,n-1$ ）的计算公式。

六、（20 分）

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt}=A(t)\vec{u}+\vec{b}(t), 0<t\le 1 \\ \vec{u}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

其中 $A(t)=\begin{pmatrix} 10t+1 & \sin 10\pi t \\ \sin 10\pi t & (100t)^2 \end{pmatrix}, \vec{b}(t)=\begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$。

(1) 建立上述问题等距节点数值解的梯形公式。

(2) 证明其局部截断误差为 $O(h^3)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，其中 h 为 t 方向的步长。

(3) 取 h＝0.1，用(1)中的格式求数值解 $\vec{u}^1 \approx \vec{u}(0.1)$。

七、（20 分）

给定矩阵 $A,\Lambda,F \in \mathbf{R}^{n\times n}$，其中 $\Lambda = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵。

(1) 证明解矩阵方程 $AX\Lambda + X = F \quad \Leftrightarrow$

$$(\lambda_k A + I)x_k = f_k,\ k = 1,2,\ldots,n \qquad (*)$$

其中 I 为 n 阶单位阵，x_k, f_k 分别为 X 与 F 的第 k 列。

(2) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 4 & 12\\ 2 & 5 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值（从小到大排列），用 QR 算法求 Λ。

(3) 设计一个求解(*) 的数值方法，并给出运算复杂性分析（即浮点乘除法次数，可用 $O(n^k)$ 的形式表示）。

(4) 给出 $A = \begin{pmatrix}6 & 2 & 9\\ 3 & 2 & 7\\ 8 & 4 & 5\end{pmatrix}$， $F = \begin{pmatrix}-17 & 12 & 81\\ -9 & 14 & 63\\ -24 & 24 & 46\end{pmatrix}$， Λ 如(2)，求解（*）。